Examen de TP

L'examen de TP est à rendre avant le mardi 8 décembre 2015, sous la forme d'un seul fichier intitulé `CMMA_NomPrénom.sce`, incluant tout ce que vous avez fait dans les deux exercices (et structuré clairement), à envoyer aux adresses `florian.bouguet@univ-rennes1.fr` ET `blandine.dubarry@univ-rennes1.fr`.

1 - Mise à l'échelle d'une marche aléatoire

On considère une marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{Z}$, définie par $S_0 = 0$ et

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

où $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi $\mathcal{X}$ centrée de carré intégrable.

1. a. Écrire une fonction `marche1(`n`)` qui retourne le vecteur $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, lorsque $\mathrm{P}(X_1 = -1) = 0.5$ et $\mathrm{P}(X_1 = 1) = 0.5$, en utilisant la fonction Scilab `grand`.

   b. Même question sans utiliser la fonction `grand`.
2. Écrire une fonction `marche2(`n, σ^2`)` qui retourne le vecteur $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, lorsque $\mathcal{X} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
3. Tracer sur un même graphe deux réalisations de la marche aléatoire générée à la question précédente, pour $n = 50$ et $s^2 = 2$, en bleu et rouge.

Dans la suite, on considèrera que $\mathcal{X}$ est la loi de Rademacher. Autrement dit, $\mathcal{X} = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, et on est dans le contexte de la question 1. On pourra donc générer des réalisations de S_n à l'aide de la fonction `marche1`.

On s'intéresse à la fonction $Z_n : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ qui, à n fixé, est définie de la manière suivante :

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(S_{\lfloor nt \rfloor} - (nt - \lfloor nt \rfloor)X_{\lfloor nt \rfloor}\Big),$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. On peut définir Z_n de manière alternative comme l'interpolation linéaire des points de coordonnées $(kn^{-1}, S_k n^{-1/2})$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.

4. Écrire une fonction `interp(`S_n, t`)` qui retourne $Z_n(t)$ en fonction d'une réalisation de S_n préalablement générée, pour $t \in [0,1]$.
5. Générer une réalisation de S_{50}, puis tracer sur $[0,1]$ la réalisation de Z_{50} associée.
6. Tracer successivement, pour $n = 50, 100, 500$ et 1000, une réalisation de la fonction Z_n sur $[0,1]$.

7. On notera que, à t fixé, $Z_n(t)$ est une variable aléatoire (on dit que Z_n est un *processus stochastique*).
   a. Estimer, lorsque $n \to \infty$, la loi limite de la variable aléatoire $Z_n(0.5)$.
   b. Conjecturer la loi limite, lorsque $n \to \infty$, de la variable aléatoire $Z_n(t)$, pour $t \in [0,1]$.
8. $\boxed{\text{Bonus}}$ Conjecturer, lorsque $n \to +\infty$, la limite de Z_n.

2 - La circulation des pièces de monnaie

On considère deux pays A et B et on note N_A le nombre de pièces frappées dans le pays A et N_B le nombre de pièces frappées dans le pays B. On suppose que $N_A \leq N_B$ et on note $\rho = \frac{N_A}{N_B}$.
On suppose que le nombre de pièces total dans A (respectivement dans B) ne varie pas au cours du temps, il y en a toujours N_A (respectivement N_B).
On note Y_n le nombre de pièces frappées par A en circulation dans le pays A au temps n. On remarque que $Y_0 = N_A$ et que $Y_n \in \{0, \dots, N_A\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On modélise les échanges de pièces entre les deux pays en considérant que $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par :

$$\begin{cases} p_{i,i-1} = \frac{i}{N_A}\left(1 - \rho + \rho\frac{i}{N_A}\right) \\ p_{i,i} = \left(1 - \frac{i}{N_A}\right)\left(1 - \rho + 2\rho\frac{i}{N_A}\right) \\ p_{i,i+1} = \rho\left(1 - \frac{i}{N_A}\right)^2 \\ p_{i,j} = 0 \text{ si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `trajectoire(n,`ρ`,`N_A`)` qui retourne une trajectoire de $(Y_n)_n$, c'est-à-dire un vecteur $(Y_0, \dots, Y_n)$.
2. Tracer des trajectoires de $(Y_n)_n$ pour $n = 1000$, $N_A = 100$ et $\rho = 1$ (en noir), $\rho = 0.7$ (en bleu) et $\rho = 0.2$ (en vert).

La suite $(Y_n)_n$ forme une chaîne de Markov homogène finie, irréductible et apériodique. Elle admet donc une unique mesure de probabilité invariante π, définie par $\pi(0), \dots, \pi(N_A)$.
Dans le cas où $\rho = 1$ (donc $N_A = N_B$, qu'on notera dans ce cas N), la mesure de probabilité invariante est définie par

$$\pi(i) = \frac{\binom{N}{i}^2}{\binom{2N}{N}}.$$

Les questions qui suivent ont pour objectif d'illustrer ce phénomène.

3. Écrire une fonction `frepemp(`$(Y_n)_n$`,`x`)` qui renvoie la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ en fonction d'une réalisation de $(Y_n)_n$ préalablement réalisée, pour $x \in [0, N_A]$.
4. Écrire une fonction `coeffbinPascal(N)` qui renvoie le vecteur avec les coefficients binomiaux $\left(\binom{N}{0}\ \binom{N}{1} \dots \binom{N}{N}\right)$ en utilisant le triangle de Pascal.
5. Utiliser cette dernière fonction pour écrire la fonction de répartition de la mesure invariante `frepinv(N,x)`
6. A l'aide de la fonction Scilab `plot2d2`, tracer sur un même graphe la fonction de répartition empirique en bleu et la fonction de répartition de la mesure invariante en rouge pour $n = 10000$ et $N = 100$.