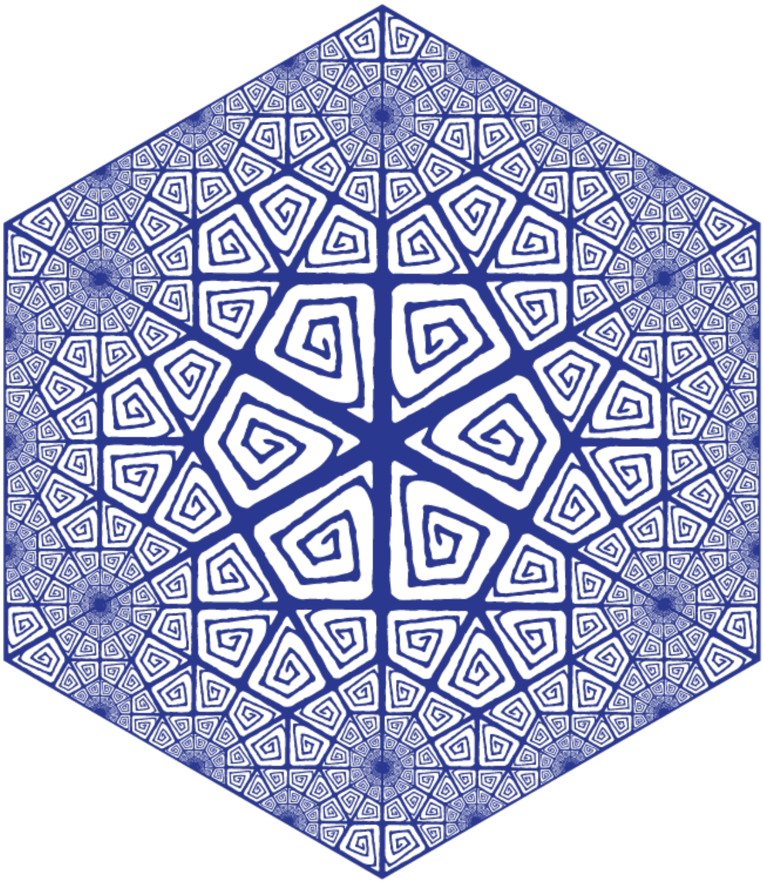
Cours de Mathématiques



Deuxième année

Florian Bouguet
TSI2

Lycée Benjamin Franklin
Orléans

Légende :

Point à noter/Erreur classique.

Rappel.

Point méthode.

Lien avec les autres matières.

Remerciements :

Ce cours de TSI2 est en grande partie inspiré des cours et planches d'exercices des personnes suivantes :

- Alexander Gewirtz
- Élodie Odrat
- Jérôme Von Buhren
- Christophe Bertault
- Salomé Oudet

`Version du 3 juin 2021`

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Chapitres introductifs

CHAPITRE I

COURBES PARAMÉTRÉES

> *If only I had the theorems. I would find the proofs easily enough.*
>
> Bernhard Riemann

Pré-requis :

- Limite et continuité
- Dérivabilité
- Développements limités

	☹	😐	☺
Étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité d'une fonction vectorielle			
Dériver un produit, un quotient, une composée de fonctions vectorielles			
Faire le DL d'une somme, d'un produit, d'un quotient, une composée de fonctions vectorielles			
Faire un double tableau de variations			
Tracer une courbe paramétrée à partir de son double tableau de variations			
Repérer et étudier un point stationnaire			
Déterminer l'équation de la tangente à une courbe en un point régulier ou stationnaire			
Calculer la longueur d'arc d'une courbe paramétrée			

On se limite aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Dans tout le chapitre, sauf mention contraire, I est un intervalle non-trivial de $\mathbb{R}$ (contenant au moins deux éléments). Dans la suite, on énonce (presque) tous les résultats en dimension 2. La généralisation à $\mathbb{R}^3$ est immédiate.

Dans ce chapitre, la variable sera généralement notée t.

Pour deux ensembles E et F, on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On note aussi parfois cet ensemble F^E.

A Fonctions vectorielles

1 Définition

Définition A1 *Applications coordonnées*

Soit $f \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. On appelle *applications coordonnées de f* les applications $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), f_2(t)).$$

On note alors $f = (f_1, f_2)$. L'application vectorielle f est caractérisée par ses applications coordonnées.

⚠ Les applications coordonnées de f sont définies sur le même domaine de définition que f. Ou plutôt, en pratique, le domaine de définition de f est l'intersection des domaines de définition des applications coordonnées.

🔧 Pour étudier une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), il faut et il suffit d'étudier ses applications coordonnées (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Proposition A2

L'ensemble $\mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⚠ Le produit et le quotient de fonctions vectorielles ne sont pas définis.

2 Limite et continuité d'une fonction vectorielle

📅 On appelle *adhérence* de l'intervalle I, noté $\overline{I}$, l'intervalle I et ses bornes. Il s'agit de tous les points où l'on peut regarder la limite d'une fonction définie sur I. Par exemple :

$$\begin{aligned}
&I =]-\infty, a], && \overline{I} = [-\infty, a] \\
&I = [a, b[, && \overline{I} = [a, b] \\
&I =]-\infty, +\infty[, && \overline{I} = [-\infty, +\infty]
\end{aligned}$$

Définition A3 *Limite*

Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Soit $t_0 \in \overline{I}$ et $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$. On dit que

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} f_1 = l_1 \\ \lim\limits_{t \to t_0} f_2 = l_2 \end{cases}.$$

On dit alors que f *admet l pour limite en t_0*.

⚠ Il n'y a pas de notion d'infini dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. En conséquence, les limites d'une fonction vectorielle sont toujours finies (quand elles existent). Par contre, la variable t peut tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ sans problème.

On définit de la même manière les limites à gauche et les limites à droite de fonctions vectorielles.

Exemple A4 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : t \mapsto \left(\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^t, -t \sin\left(\frac{1}{t-1}\right)\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la déterminer.

$\diamondsuit$

Exemple A5 :
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \left(t\cos\left(2+\frac{1}{t}\right), \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

1. f admet-elle une limite en 0 ? Si oui, la déterminer.
2. f admet-elle une limite en $+\infty$? Si oui, la déterminer.

$\diamondsuit$

Proposition A6 *Unicité de la limite*

Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ et $t_0 \in \overline{I}$. Si f admet une limite en t_0, alors celle-ci est unique.

Proposition A7 *Reformulations de la limite*

Soit $f \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Soit $t_0 \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}^2$. Alors

(i) On a

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \lim_{t\to t_0} (f(t) - l) = 0.$$

(ii) Si $t_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = l \iff \lim_{h\to 0} f(t_0 + h) = l.$$

Proposition A8

Soit $f, \widetilde{f} \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Soit $t_0 \in \overline{I}$ et $l, \widetilde{l} \in \mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

(i) Si $\lim\limits_{t_0} f = l$ et $\lim\limits_{t_0} \widetilde{f} = \widetilde{l}$, alors $\lim\limits_{t_0} \left(f + \widetilde{f}\right) = l + \widetilde{l}$.

(ii) Si $\lim\limits_{t_0} f = l$, alors $\lim\limits_{t_0} (\lambda f) = \lambda l$.

⚠ Le produit et le quotient de fonctions vectorielles ne sont pas définis.

Définition A9 *Continuité*

Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Soit $t_0 \in I$. On dit que f est continue en t_0 (resp. sur I) si f_1 et f_2 sont continues en t_0 (resp. sur I).

On note $\mathcal{C}^0\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

⚠ Pour être continue en t_0, f doit d'abord être définie en t_0. C'est pourquoi il faut que $t_0 \in I$.

📅 f_1 est continue en t_0 si, et seulement si, f_1 admet une limite finie en t_0.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté concernant l'ensemble d'arrivée, on note simplement $\mathcal{C}^0(I)$.

On définit de la même manière la continuité à gauche et la continuité à droite d'une fonction vectorielle.

Proposition A10

L'ensemble $\mathcal{C}^0\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$.

Exemple A11 :
Étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(|t+1|, \lfloor t \rfloor, \frac{3t}{2t+1}\right).$$

$\diamondsuit$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ (aussi noté $E(t)$) désigne la *partie entière de* t, c'est-à-dire l'entier naturel juste inférieur à t. Il faut retenir que

$$\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1.$$

De plus, $\lfloor t \rfloor = t$ si, et seulement si, $t \in \mathbb{Z}$.

3 Dérivabilité et régularité d'une fonction vectorielle

Comme pour la limite ou la continuité, étudier la régularité (dérivabilité, classe $\mathcal{C}^p$, etc.) d'une fonction vectorielle revient simplement à étudier la régularité de ses fonctions coordonnées.

Définition A12 *Dérivabilité*

Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 (resp. sur I) si f_1 et f_2 sont dérivable en t_0 (resp. sur I). On note alors

$$f'(t_0) = \left(f_1'(t_0), f_2'(t_0)\right).$$

f_1 est dérivable en t_0 si, et seulement si, la limite $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \dfrac{f(t_0) + h - f(t_0)}{h}$ existe et est finie. On note alors cette limite $f_1'(t_0)$.

Proposition A13

Soit $f, g \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, $\varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $t_0 \in I$. Alors

(i) Si f et g sont dérivables en t_0, alors $f+g$ est dérivable en t_0 et

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

(ii) Si f et φ sont dérivables en t_0, alors φf est dérivable en t_0 et

$$(\varphi f)'(t_0) = \varphi(t_0) f'(t_0) + \varphi'(t_0) f(t_0).$$

Définition A14 *Classes de régularité*

Soit $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I si f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I.

Proposition A15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $\mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ et $\mathcal{C}^\infty\left(I, \mathbb{R}^2\right)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$.

Exemple A16 :

Etudier la dérivabilité, puis déterminer la dérivée, de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \left(\ln\left(1+e^t\right), \tan t, \arcos t\right) \end{array}$. ◇

4 Développements limités

Définition A17 *Développement limité (DL) d'une fonction vectorielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x_0 \in \overline{I}$ et $f \in \mathcal{F}\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. On dit que f *admet un DL à l'ordre n en t_0* si f_1 et f_2 admettent chacune un DL à l'ordre n en t_0.

Théorème A18 *Formule de Taylor*[1]*-Young*[2]

Soit $n \in \mathbb{N}^*, x_0 \in I$ et $f \in \mathcal{C}^n\left(I, \mathbb{R}^2\right)$. Alors f admet un DL à l'ordre n en x_0 donné par :

$$\left(f_1(x), f_2(x)\right) \underset{x \to x_0}{=\!=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f_1^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right), \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f_2^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right)\right)$$

ou, de manière équivalente,

$$\left(f_1(x_0+h), f_2(x_0+h)\right) \underset{h \to 0}{=\!=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f_1^{(k)}(x_0) + o\left(h^n\right), \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f_2^{(k)}(x_0) + o\left(h^n\right)\right).$$

f_1 est continue en x_0 si, et seulement si, f_1 admet un DL à l'ordre 0 en x_0.

f_1 est dérivable en x_0 si, et seulement si, f_1 admet un DL à l'ordre 1 en x_0.

Exemple A19 :
Si elle en admet un, déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \left(\ln(1+\sin t), \sum_{k=0}^{6} (-2t)^k, e^t - \cos t\right) \end{array}.$$

◇

⚠ En pratique, on n'étudiera pas le DL de f, mais bien le DL de chacune de ses applications coordonnées (et c'est exactement la même chose).

B Outils géométriques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

1 Produit scalaire et norme

1. Brook Taylor (1685-1731) : artiste et mathématicien anglais.
2. William Henry Young (1863-1942) : Mathématicien anglais.

Définition B1 *Produit scalaire*

Soit $u=(x,y)\,,u'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$. On appelle *produit scalaire de u et u'* le nombre

$$u\cdot u'=xx'+yy'.$$

On note aussi le produit scalaire $<u,v>$ ou $(u|v)$.

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

Remarque B2 : Le produit scalaire vérifie quatre propriétés fondamentales :

- Bilinéarité : pour tous $u,u',v\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}(\lambda u+\lambda' u')\cdot v&=\lambda u\cdot v+\lambda' u'\cdot v,\\ v\cdot(\lambda u+\lambda' u')&=\lambda v\cdot u+\lambda' v\cdot u'.\end{aligned}$$
- Symétrie : pour tous $u,u'\in\mathbb{R}^2$, on a
$$u\cdot u'=u'\cdot u.$$
- Positivité : pour tout $u\in\mathbb{R}^2$,
$$u\cdot u\geq 0.$$
- Définition : pour tout $u\in\mathbb{R}^2$, on a
$$u\cdot u=0\iff u=0.$$

◊

Proposition B3

Soit $f,g\in\mathcal{C}^1\left(I,\mathbb{R}^2\right)$, on définit l'application $\varphi:\begin{array}{ccc}I&\to&\mathbb{R}\\ t&\mapsto&f\left(t\right)\cdot g\left(t\right)\end{array}$. Alors $\varphi\in\mathcal{C}^1\left(I\right)$ et

$$\forall t\in I,\quad \varphi'\left(t\right)=f'\left(t\right)\cdot g\left(t\right)+f\left(t\right)\cdot g'\left(t\right).$$

Définition B4 *Norme*

Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On appelle *norme de u* le nombre

$$\|u\|=\sqrt{u\cdot u}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

La norme traduit la notion de distance (ou de taille) dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition B5

Soit $f\in\mathcal{C}^1\left(I,\mathbb{R}^2\right)$, on définit l'application $\Phi:\begin{array}{ccc}I&\to&\mathbb{R}\\ t&\mapsto&\|f\left(t\right)\|\end{array}$. Si f ne s'annule pas sur I, alors $\Phi\in\mathcal{C}^1\left(I\right)$ et

$$\forall t\in I,\quad \varphi'\left(t\right)=\frac{f'\left(t\right)\cdot f\left(t\right)}{\|f\left(t\right)\|}.$$

2 Produit vectoriel

Définition B6 *Produit vectoriel*
Soit $u = (x, y, z)\,, u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$. On appelle *produit vectoriel de u et v* le vecteur

$$u \wedge u' = (yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y)\,.$$

$u \wedge u'$ est un vecteur orthogonal à u et u' et $u \wedge u'$ est nul si, et seulement si, u et u' sont colinéaires.

⚠ Le produit vectoriel n'a aucun sens en dehors de $\mathbb{R}^3$.

Proposition B7
Soit $f, g \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathbb{R}^3\right)$, on définit l'application $h : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & f(t) \wedge g(t) \end{array}$. Alors $h \in \mathcal{C}^1(I)$ et

$$\forall t \in I, \quad h'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t)\,.$$

3 Déterminant

Définition B8 *Déterminant*
Soit $u = (x, y)\,, u' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On appelle *déterminant de u et v* le nombre

$$\det(u, u') = xy' - x'y.$$

Le déterminant de u et v représente l'aire (algébrique) du parallélogramme engendré par u et v. Il est nul si, et seulement si, u et u' sont colinéaires.

⚠ Le déterminant existe aussi dans $\mathbb{R}^3$ (et même dans $\mathbb{R}^n$ quelconque), on en verra la définition dans un autre chapitre. Dans $\mathbb{R}^3$, on parle aussi de *produit mixte.*

Remarque B9 : Le déterminant vérifie quatre propriétés fondamentales :

- Bilinéarité : pour tous $u, u', v \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, on a

$$\det(\lambda u + \lambda' u', v) = \lambda \det(u, v) + \lambda' \det(u', v)\,,$$
$$\det(v, \lambda u + \lambda' u') = \lambda \det(v, u) + \lambda' \det(v, u')\,.$$

- Antisymétrie : pour tous $u, u' \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\det(u, u') = -\det(u', u)\,.$$

- Alternance : pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$\det(u, u) = 0.$$

- $\det((1, 0), (0, 1)) = 1$.

◊

Proposition B10

Soit $f, g \in \mathcal{C}^1\left(I, \mathbb{R}^2\right)$, on définit l'application $\psi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \det\left(f\left(t\right), g\left(t\right)\right) \end{array}$. Alors $\psi \in \mathcal{C}^1\left(I\right)$ et

$$\forall t \in I, \quad \psi'\left(t\right) = \det\left(f'\left(t\right), g\left(t\right)\right) + \det\left(f\left(t\right), g'\left(t\right)\right).$$

C Courbes paramétrées

Dans tout ce qui suit, le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1 Définition et interprétation

Dans toute la suite, f est une fonction vectorielle définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), et on note x et y (resp. x, y et z) ses applications coordonnées. Pour tout $t \in I$, on note $M\left(t\right)$ le point de coordonnées $\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$ (resp. de coordonnées $\left(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\right)$).

Définition C1 *Courbe paramétrée*

On définit l'ensemble

$$\Gamma = \left\{M\left(t\right) \in \mathscr{P} / t \in I\right\}.$$

Γ est appelé *courbe paramétrée* (ou *arc paramétré*) de paramétrage f.

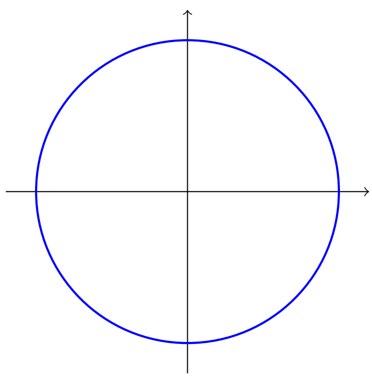
Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f \in \mathcal{C}^n\left(I\right)$.

⚠ Sur la courbe paramétrée Γ, on ne peut pas lire à quel endroit était le solide M à l'instant t.

Exemple C2 :
On considère la fonction $f = \left(x, y\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right) = \left(\cos t, \sin t\right).$$

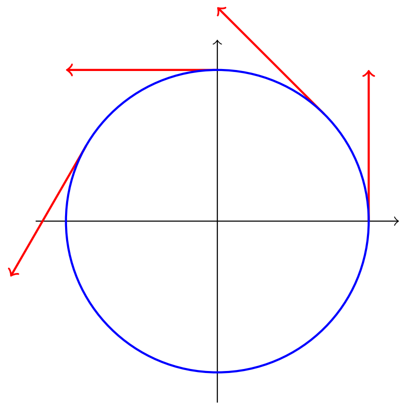
Alors l'arc paramétré Γ associé à f est le cercle unité du plan $\mathscr{P}$.



On remarquera que dans cet exemple simplissime, il y a une périodicité évidente (2π) et qu'on obtient le tracé de Γ dès qu'on a tracé f sur $[-\pi, \pi]$. Mais aussi, par parité et imparité des applications coordonnées, il semble évident qu'il suffit de tracer f sur $[0, \pi]$ ou sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Toutes ces réflexions seront à mener au préalable pour simplifier le travail de tracé dans la suite.[3]

Dans cet exemple, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et le vecteur dérivé est donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$



On remarque que non seulement le vecteur dérivé donne la direction du déplacement (la tangente à la courbe), mais en plus il indique la "vitesse de déplacement" du point M. Ici,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|f'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

La vitesse de déplacement est donc constante égale à 1. $\diamondsuit$

2 Réduction du domaine d'étude

Proposition C3 *Périodicité*

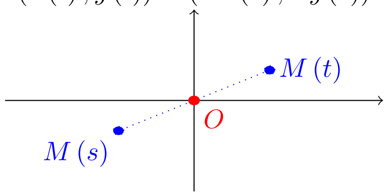
Soit Γ une courbe paramétrée par (x, y). S'il existe $T > 0$ tel que x et y sont T-périodiques, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ ou $[0, T]$.

Proposition C4 *Symétrie*

Soit Γ une courbe paramétrée par (x, y) Soit $s, t \in I$, et notons $M(t)$ et $M(s)$ les points de coordonnées respectives $(x(t), y(t))$ et $(x(s), y(s))$. Alors on peut avoir une symétrie entre $M(t)$ et $M(s)$ donnée dans la table suivante :

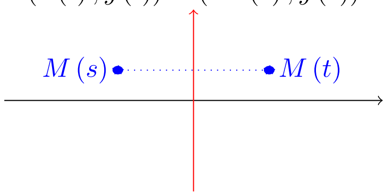
3. Comme pour tracer une fonction numérique, en fait.

$(x(t), y(t)) = (-x(s), -y(s))$



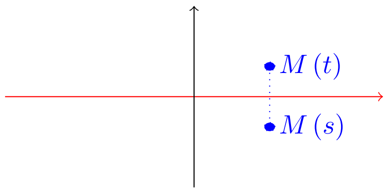
Symétrie centrale par rapport à l'origine

$(x(t), y(t)) = (-x(s), y(s))$



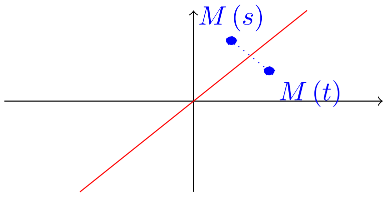
Symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées

$(x(t), y(t)) = (x(s), -y(s))$



Symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses

$(x(t), y(t)) = (y(s), x(s))$



Symétrie axiale par rapport à la première bissectrice

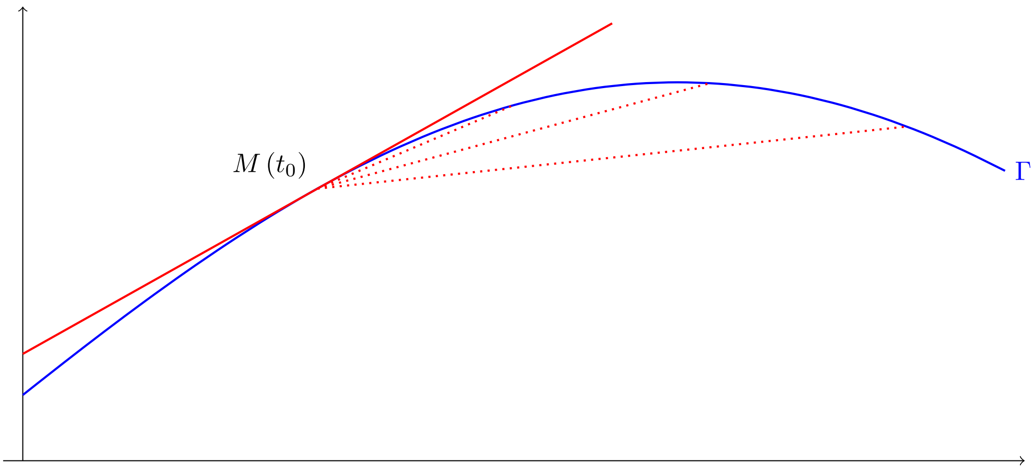
En pratique, on cherchera de telles symétries pour $s = -t$, $s = a - t$ ou $s = \dfrac{1}{t}$.

3 Tangente

Dans la suite, Γ est une courbe paramétrée par $f = (x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition C5 *Tangente*

Soit $t_0 \in I$. *La tangente à* Γ *au point* $M(t_0)$ est la limite, quand elle existe, des droites passant par $M(t_0)$ et $M(t)$ lorsque $t \to t_0$.



Définition C6 *Points régulier et points stationnaire*

Soit $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq 0$, on dit que $M(t_0)$ *est régulier*. Si $f'(t_0) = 0$, on dit que $M(t_0)$ *est stationnaire*.

Si tous les points de Γ sont réguliers, on dit que Γ *est régulier*.

🎓 Cinétiquement, on interprète un point stationnaire comme correspondant à un instant où la vitesse du mobile M est nulle. Cela ne signifie pas obligatoirement que la courbe paramétrée associée n'a pas de tangente.

Proposition C7 *Tangente en un point régulier*
Soit $t_0 \in I$. Si $M(t_0)$ est régulier, alors la courbe Γ admet une tangente en $M(t_0)$: il s'agit de la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $f'(t_0)$.

On remarque que $f'(t_0)$ dirige la tangente dans le sens de parcours.

Proposition C8 *Tangente en un point stationnaire*
Soit $t_0 \in I$. Supposons que Γ soit suffisamment régulière. Si $M(t_0)$ est stationnaire et qu'il existe un plus petit $p \in [\![2, n]\!]$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$, alors la courbe Γ admet une tangente en $M(t_0)$: il s'agit de la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $f^{(p)}(t_0)$.

🔧 Pour déterminer un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t_0)$, on détermine le premier vecteur dérivé non-nul de f en t_0.

Exemple C9 :
Soit Γ une courbe paramétrée par $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2)$. Soit $t_0 \in I$, et on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(k)}(t_0) \neq 0$. Déterminer l'équation cartésienne de la tangente à Γ en $M(t_0)$.

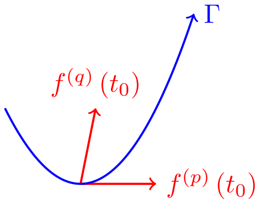
$\diamondsuit$

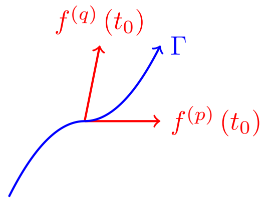
🔧 Pour étudier les positions relatives de Γ et de sa tangente en $M(t_0)$ au voisinage de $M(t_0)$, on utilisera des développements limités, comme pour les fonctions numériques.

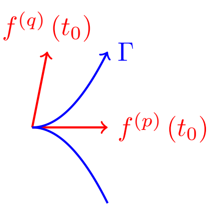
Proposition C10 *Allure d'une courbe au voisinage de sa tangente*
Soit $t_0 \in I$. Supposons que Γ soit suffisamment régulière, et que les entiers suivants existent :

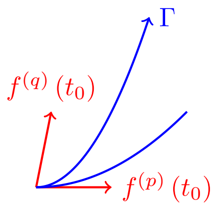
$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* / f^{(p)}(t_0) \neq 0\}, \quad q = \min\{k \geq p+1 / f^{(p)}(t_0) \text{ et } f^{(q)}(t_0) \text{ ne sont pas colinéaires}\}.$$

Alors l'allure de Γ au voisinage de $M(t_0)$ se lit dans le tableau suivant :

<table>
<tr><td>p impair, q pair


Point ordinaire</td><td>p impair, q impair


Point d'inflexion</td></tr>
<tr><td>p pair, q impair


Point de rebroussement de première espèce</td><td>p pair, q pair


Point de rebroussement de deuxième espèce</td></tr>
</table>

En particulier, un point régulier ne peut pas être un point de rebroussement (car $p = 1$).

⚠ On remarquera que la courbe Γ "sort" toujours dans le quart de plan délimité par $\left(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\right)$.

4 Tracé d'une courbe paramétrée

🔧 Plan d'étude d'une courbe paramétrée par $f = (x, y)$:

- Détermination du domaine de définition (intersection des domaines de définition de x et y).
- Réduction du domaine d'étude (parité, périodicité...).
- Étude des variations des fonctions x et y et calcul des limites de x et y aux bornes de l'intervalle d'étude.
- Étude des tangentes verticales (quand $x'(t_0) = 0$) et des tangentes horizontales (quand $y'(t_0) = 0$).
- Étude des points stationnaires (quand $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$).
- Tracé de la courbe.

Remarque C11 : Pour tracer les branches infinies (quand $t \to +\infty$ par exemple), on pourra distinguer les cas suivants :

(i) Si x et y admettent des limites finies en $+\infty$, alors f possède une limite finie en $+\infty$.

(ii) Si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, alors Γ possède une asymptote verticale d'équation $x = x_0$ en $+\infty$.

(iii) Si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y_0$, alors Γ possède une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$ en $+\infty$.

(iv) Si $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$, on a plusieurs sous-cas.

- Si
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R},$$
alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
- Si $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, alors Γ admet une branche infinie de direction verticale en $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors Γ admet une branche infinie de direction horizontale en $+\infty$.

$\diamondsuit$

Pour affiner le tracé de la courbe, on pourrait également rechercher les points doubles, c'est-à-dire trouver $s, t \in I$ tels que $M(s) = M(t)$. Cela correspond aux points où la courbe "repasse sur elle-même". En pratique, résoudre l'équation $f(t) = f(s)$ est généralement très difficile.[4]

Exemple C12 :
Tracer la courbe Γ paramétrée par

$$\begin{cases} x : t \mapsto 3\cos t \\ y : t \mapsto 2\sin t \end{cases}.$$

$\diamondsuit$

Exemple C13 :
Tracer la courbe Γ paramétrée par

$$\begin{cases} x : t \mapsto \cos(3t) \\ y : t \mapsto \sin(2t) \end{cases}.$$

$\diamondsuit$

4. Sauf en cas de périodicité, ce qu'on a normalement écarté après avoir réduit le domaine d'étude.

Exemple C14 :
Tracer la courbe Γ paramétrée par

$$\begin{cases} x : t \mapsto \ln(2+t) + \frac{1}{t} \\ y : t \mapsto t + \frac{1}{t} \end{cases}.$$

$\diamondsuit$

5 Longueur d'arc

Définition C15 *Longueur d'arc*
Soit $t_0, t_1 \in I$ tels que $t_0 \leq t_1$. On appelle *longueur de l'arc* Γ *entre* t_0 *et* t_1 le nombre

$$\int_{t_0}^{t_1} \|f'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

On appelle *longueur de l'arc* Γ le nombre suivant, s'il existe :

$$\int_I \|f'(t)\| dt = \int_I \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

⚠ Ici I peut être un intervalle ouvert, et on ne sait pas intégrer des fonctions continues sur un intervalle ouvert pour le moment. Il convient de relire cette dernière définition à la lumière du chapitre sur les intégrales généralisées.

Exemple C16 :
Soit $R > 0$ et Γ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto 1 + R\cos t \\ y : t \mapsto 2 + R\sin t \end{cases}$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1. Sans justification, dessiner l'allure de Γ.
2. Déterminer la longueur d'arc entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$.

$\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 1.1
Tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \sin t \\ y : t \mapsto \frac{\sin t}{2+\cos t} \end{cases}$$

Exercice 1.2
Tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \exp(\sin(2t)) \\ y : t \mapsto \exp(\cos t) \end{cases}.$$

Exercice 1.3

On définit la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \cos t \\ y : t \mapsto \sin t \\ z : t \mapsto t \end{cases}.$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$. Déterminer la longueur d'arc de Γ entre les points $M(0)$ et $M(10\pi)$.

Exercice 1.4

Étudier la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto t\cos(\pi t) \\ y : t \mapsto t\sin(\pi t) \end{cases}$$

Tracer Γ sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 1.5

On définit la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \frac{2}{3}\left(t + \frac{1}{t}\right) \\ y : t \mapsto 2\left(t - \frac{1}{t}\right) \end{cases}.$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1. Montrer qu'on peut se restreindre à l'étude de Γ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. ?
   Indication : on pourra comparer les points $M(t)$ et $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$ pour $t \neq 0$.
2. (a) Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty}(y(t) - \lambda x(t)) = \mu$. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?
   (b) Etudier la position de Γ par rapport à la droite $y = \lambda x + \mu$.
3. Tracer l'allure de Γ.

Exercice 1.6

Tracer la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto \sin t \\ y : t \mapsto \frac{(\cos t)^2}{2-\cos t} \end{cases}.$$

Exercice 1.7

On définit la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto t - \sin t \\ y : t \mapsto 1 - \cos t \end{cases}.$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$. Γ est appelée *cycloïde*.

1. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de Γ à l'intervalle $[0, \pi]$.
2. Tracer l'allure de Γ.

3. Déterminer la longueur de l'arc de Γ entre les points $M(0)$ et $M(\pi)$. En déduire la longueur d'arc de Γ entre $M(0)$ et $M(2\pi)$.

Exercice 1.8

On définit la fonction $f : x \mapsto x^2$, et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminer la longueur de l'arc de $\mathscr{C}_f$ entre les points d'abscisse -1 et 1.

Exercice 1.9

Soit $a > 0$. On définit la courbe Γ_a paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto a(\cos t)^3 \\ y : t \mapsto a(\sin t)^3 \end{cases}.$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$. Γ est appelée *astroïde*.

1. Montrer que l'on peut restreindre l'étude de Γ_a à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.
2. Tracer l'allure de Γ_a.
3. Déterminer la longueur d'arc de Γ_a entre les points $M(0)$ et $M(2\pi)$.

Exercice 1.10

On définit la courbe Γ paramétrée par :

$$\begin{cases} x : t \mapsto 3 - 2\cos t - \cos(2t) \\ y : t \mapsto 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}.$$

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$. Γ est appelée *deltoïde*.

1. Montrer que l'on peut réduire l'étude de la courbe Γ à l'intervalle $I_1 = [0, \pi]$.

On notera Γ_1 la courbe paramétrée par (x, y) sur I_1.

2. Montrer que Γ_1 possède deux points stationnaires $M(0)$ et $M(t_0)$, et déterminer t_0. Tracer l'allure de Γ_1 au voisinage de ces deux points.
3. Soit Δ la tangente à la courbe Γ au point $M(t_0)$, et soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(3, 0)$ et de rayon 3.
   (a) Démontrer que $\Omega \in \Delta$.
   (b) Déterminer $\Gamma \cap \mathscr{C}$.
   (c) Tracer les allures de Γ_1, Δ et $\mathscr{C}$.
4. Tracer l'allure de Γ.
5. Déterminer la longueur de la courbe sur une période.

Exercice 1.11

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^2$ décrivant le déplacement d'un point M. On suppose que f' et f'' ne s'annulent pas sur I.

1. Montrer que le point M se déplace à vitesse constante si, et seulement si, le vecteur vitesse f' et le vecteur accélération f'' sont orthogonaux.
2. Montrer que le point M accélère si, et seulement si, l'angle entre le vecteur vitesse et le vecteur accélération est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.12

On appelle *folium de Descartes* la courbe Γ donnée par l'équation cartésienne $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

1. Déterminer un paramétrage de Γ, qu'on notera par la suite (x, y).
   Indication : on pourra étudier l'intersection de $\mathscr{C}$ et des droites d'équation $y = cx$ pour $c \in \mathbb{R}$.

On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$.

2. Justifier que l'on peut restreindre l'étude du paramétrage de Γ à l'intervalle $]-1,1]$.
   Indication : on pourra considérer les points $M(t)$ et $M\left(\frac{1}{t}\right)$.
3. Montrer que $\lim_{t \to -1} (x(t) + y(t)) = -1$. Comment interpréter graphiquement cette limite ?
4. Montrer que Γ est toujours au dessus de la droite d'équation $y = -x - 1$.
5. Tracer l'allure de Γ.

CHAPITRE II

COMPLÉMENTS SUR L'ALGÈBRE LINÉAIRE

« Un mathématicien n'est pas quelqu'un qui passe son temps à faire des calculs, c'est quelqu'un qui trouve des techniques pour ne pas avoir à les faire. »

Anonyme

Pré-requis :

- Espaces vectoriels de dimension finie
- Matrices

	☹	😐	☺
Montrer qu'une application est linéaire			
Montrer qu'un sous-ensemble est un espace vectoriel			
Montrer qu'une famille (finie ou infinie) est libre			
Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel (notamment noyau et image)			
Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires			
Savoir reconnaître et utiliser les trois caractérisations des hyperplans			
Interpréter la forme d'une matrice en termes de stabilité			
Calculer l'expression d'un projecteur ou d'une symétrie			
Déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur ou d'une symétrie			
Savoir passer de l'expression d'une application linéaire à sa matrice et inversement			
Connaître et savoir utiliser les formules de changement de coordonnées et de changement de base			
Manipuler la transposée d'une matrice (formule théorique ou explicitement)			
Manipuler la trace d'une matrice (formule théorique ou explicitement)			

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, on définit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

A Familles et sous-espaces vectoriels

1 Familles de vecteurs

Définition/Proposition A1 *Espace vectoriel engendré*

Soit $A = (u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *espace vectoriel engendré par A* l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A ; on le note $\mathrm{Vect}\,(A)$. On a

$$\mathrm{Vect}\,(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i / n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

$\mathrm{Vect}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, $\mathrm{Vect}\,(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. C'est également l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A.

En première année, on définit l'espace vectoriel engendré par une famille finie. Ces deux définition sont alors les mêmes.

Définition A2 *Famille génératrice*

Soit $A = (u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de E. On dit que A est *génératrice* de E si $E = \mathrm{Vect}\,A$.

C'est la même définition que pour les familles finies. De manière équivalente, cela signifie que tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de A (l'inclusion $\mathrm{Vect}\,A \subseteq E$ étant évidente).

Proposition A3 *Sous-familles et sur-familles d'une famille génératrice*

Soit A une famille génératrice de E.

(i) Toute sur-famille de A est génératrice de E.
(ii) Soit $u \in A$. Alors $A \setminus (u)$ est génératrice si, et seulement si, $u \in \mathrm{Vect}\,(A \setminus (u))$.

Définition A4 *Famille finie libre*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_n \in E$. On dit que la famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ est *libre* si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0\right).$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont *linéairement indépendants.*

Définition A5 *Famille libre*

Soit $A = (u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille quelconque de E. On dit que A est *libre* si toute sous-famille finie de A est libre, c'est-à-dire si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (u_1, \dots, u_n) \text{ est libre.}$$

Une famille qui n'est pas libre est dite *liée.*

Soit A une famille infinie de E. Pour montrer que A est libre, on considère $u_1, \dots, u_n \in A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$, et on montre alors que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer que A est liée, on doit savoir exhiber une combinaison linéaire non-triviale annulant une sous-famille finie de A. C'est soit beaucoup plus facile, soit beaucoup plus difficile.

⚠ La liberté ne dépend pas de l'espace vectoriel dans lequel on travaille. Elle dépend en revanche de $\mathbb{K}$:

- Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est libre. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \times 1 + \mu \times i = 0$. Alors $\lambda = \mathfrak{Re}\,(0) = 0$ et $\mu = \mathfrak{Im}\,(0) = 0$.
- Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est liée. En effet, on a $i \times 1 + (-1) \times i = 0$ (ici, on peut prendre des scalaires complexes).

📅 On rappelle qu'une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

📅 On rappelle qu'une famille de trois vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs ne sont pas coplanaires.

📅 Si A possède deux fois le même élément, alors elle est liée. Si $0 \in A$ alors A est liée.

Exemple A6 :
Montrer que la famille $A = ((1, 2), (1, 3))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$ de trois manières différentes. ♢

Exemple A7 :
Etudier la liberté des familles suivantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$(\cos, \sin, x \mapsto \sin(x+2)), \quad (\cos, \sin, x \mapsto \sin(2x)).$$

♢

Proposition A8 *Sous-familles et sur-familles d'une famille libre*
Soit A une famille libre de E.

(i) Toute sous-famille de A est libre.
(ii) Soit $u \in E$. Alors $A \cup (u)$ est libre si, et seulement si, $u \notin \operatorname{Vect} A$.

Proposition A9
Soit $A = (P_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille (éventuellement infinie) de $\mathbb{K}[X]$. Si les polynômes P_i sont non-nuls et de degrés distincts, alors A est libre. Une telle famille est dite *échelonnée en degré*.

Exemple A10 :
La famille $\left(X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$. C'est la *base canonique* de $\mathbb{K}[X]$. ♢

Exemple A11 :
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $F = (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de deux manières différentes : par l'absurde et par récurrence. ♢

Définition A12 *Base*
Soit A une famille de E. On dit que A est une base de E si A est libre et génératrice de E.

📅 Dans un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, toutes les bases ont même cardinal n (c'est la définition de la dimension).

🔧 Pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie, on montre qu'il possède une partie génératrice finie. Pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, on montre qu'il possède une partie libre infinie.

Exemple A13 :
$\mathbb{K}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie. ♢

Théorème A14 *Caractérisation des bases en dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit A une famille de E. Si A possède n vecteurs, alors

$$\begin{aligned} A \text{ est une base de } E &\iff A \text{ est libre dans } E \\ &\iff A \text{ est une partie génératrice de } E. \end{aligned}$$

Définition/Théorème A15 *Coordonnées dans une base*

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

On appelle $(a_1, \ldots, a_n)$ les coordonnées de x dans la base B.

2 Matrices et familles

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ fixée.

⚠ Si E n'est pas un espace vectoriel classique ($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$...), on ne peut pas parler de base *canonique*.

Définition A16 *Matrice d'un vecteur et matrice d'une famille*

Soit $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. On appelle *matrice dans la base B de x* :

$$\mathrm{mat}_B(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Il s'agit de la matrice où les coordonnées de x (dans la base B) sont écrites en colonne. Soit $F = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

On appelle *matrice dans la base B de F* :

$$\mathrm{mat}_B(F) = \mathrm{mat}_B(u_1, \ldots, u_n) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Il s'agit de la matrice où les coordonnées des u_i sont écrites en colonne les unes après les autres.

Proposition A17

Soit F une famille de n vecteurs. Alors on a équivalence entre

(i) F est une base de E.

(ii) $\mathrm{mat}_B(F)$ est inversible.

Définition/Proposition A18 *Matrice de passage*

Soit B et B' deux bases de E. On appelle *matrice de passage de B à B'*

$$\mathrm{Pass}(B, B') = P_{B,B'} = \mathrm{mat}_B(B').$$

Alors $\mathrm{Pass}(B, B') \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Pass}(B, B')^{-1} = \mathrm{Pass}(B', B)$.

Théorème A19 *Formule de changement de coordonnées*

Soit B et B' deux bases de E et F une famille finie de vecteurs de E. Alors

$$\underbrace{\mathrm{mat}_{B'}(F)}_{X'} = \underbrace{\mathrm{Pass}(B, B')^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\mathrm{mat}_B(F)}_{X}.$$

Exemple A20 :
On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique B. On note $B' = \left(1, 1+X, (1+X)^2\right)$.

1. Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $Q = 2 - 3X + 2X^2$ dans la base B'.

$\diamondsuit$

3 Sous-espaces vectoriels

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ et $F + G$ sont aussi des sous-espaces vectoriels. Attention, ce n'est pas le cas de $F \cup G$ en général. En dimension finie, on a la formule de Grassmann[1] (ou théorème des quatre dimensions) :

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

On rappelle les équivalences suivantes :

(i) Somme directe : $F_1 \oplus F_2 \iff \forall x \in F_1 + F_2, \exists! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0\}$.
(ii) Somme : $F_1 + F_2 = E \iff \forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$.
(iii) Supplémentaires : $F_1 \oplus F_2 = E \iff \forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2$.

Proposition A21 *Caractérisation des supplémentaires en dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives B_1 et B_2. Alors on a équivalence entre :

(i) $F_1 \oplus F_2 = E$.
(ii) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$.
(iii) $F_1 + F_2 = E$ et $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$.
(iv) $B_1 \cup B_2$ est une base de E.

1. Hermann Günther Grassmann (1809-1877) : linguiste et mathématicien allemand.

Pour montrer que F_1 et F_2 sont en somme directe, on montrera que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Pour montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires :

- s'il est évident que $F_1 + F_2 = E$ ou que $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E$ (en dimension finie !), on vérifiera simplement que $F \cap G = \{0\}$.
- sinon, on raisonnera par analyse/synthèse pour trouver la décomposition. L'analyse donne l'unicité et la synthèse donne l'existence.

Exemple A22 :
Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note

$$F_1 = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}, \quad F_2 = \{x \mapsto ax + b / a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

$\diamondsuit$

Définition/Proposition A23 *Somme de sous-espaces vectoriels*
Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On définit *la somme des F_i* par

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \in E / \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in F_i \right\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Définition A24 *Somme directe*
Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme des F_i est *directe* si

$$\forall x \in \sum_{i=1}^{p} F_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

On note alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Pour être tout à fait rigoureux, on ne parle pas de supplémentaires si $p \geq 3$. Si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on dira qu'on a trouvé *une décomposition en somme directe de E.*

La caractérisation avec l'intersection réduite à 0 est vraie pour $p = 2$ mais pas si $p \geq 3$. Si la somme des F_i est directe alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} F_i = \{0\}$ mais la réciproque n'est pas vraie. On a un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ avec

$$F_1 = \operatorname{Vect}(1, 0), \quad F_2 = \operatorname{Vect}(0, 1), \quad F_3 = \operatorname{Vect}(1, 1).$$

C'est la raison principale pour laquelle, en deuxième année, on met l'accent sur la vision "décompositions".

Proposition A25 *Somme directe*
Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) La somme des F_i est directe.

(ii) Pour tous $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots, \times F_p$,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} x_i = 0\right) \Longrightarrow (\forall i \in [\![1, p]\!], x_i = 0)\,.$$

Pour montrer que les F_i sont en somme directe, on utilise cette proposition en pratique : on montre que le vecteur nul se décompose de manière unique sur $F_1 \times \cdots \times F_p$.

Proposition A26 *Base adaptée à une décomposition en somme directe*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives $B_1, \dots, B_p$. Alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

(ii) $B_1 \cup \cdots \cup B_p$ est une base de E.

Dans ce cas, la base $B_1 \cup \cdots \cup B_p$ est dite *adaptée à la décomposition en somme directe de E.*

Exemple A27 :
On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F_1 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}, \quad F_2 = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases} \right\},$$

$$F_3 = \mathrm{Vect}\,(0, 1, 0, 1)\,.$$

Montrer que F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe et que $\bigoplus_{i=1}^{3} F_i = \mathbb{R}^4$. $\diamondsuit$

Exemple A28 :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $F_1, \dots, F_3$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \Longrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0\} \\ \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 \end{cases}.$$

2. La réciproque est-elle vraie ?

$\diamondsuit$

4 Hyperplans

Dans toute cette partie, E est un espace de dimension finie n.

Définition A29 *Hyperplan*

On appelle *hyperplan de E* tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple A30 :
Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels, et les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles. En fait, cela reste vrai pour n'importe quels espaces de dimension 3 ou 2. ♢

Théorème A31 *Caractérisation d'un hyperplan par son supplémentaire*
Soit H un sous-espace vectoriel de E. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) H est un hyperplan de E.
(ii) Il existe $u \in E \setminus H$ tel que $H \oplus \text{Vect}(u) = E$.
(iii) Pour tout $u \in E \setminus H$, $H \oplus \text{Vect}(u) = E$.

Les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces admettant une droite comme supplémentaire (c'est même la définition des hyperplans en dimension infinie). Dans ce cas, dès que $u \in E \setminus H$, alors $\mathbb{H} \oplus \text{Vect}(u) = E$.

Théorème A32 *Caractérisation d'un hyperplan par son équation cartésienne*
Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Alors on a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) H est un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
(ii) Il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} u_i x_i = 0.$$
(iii) Il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que l'équation cartésienne de H soit
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n = 0.$$

On peut généraliser cette équation à E muni d'une base B quelconque, auquel cas $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base B. On parle alors d'une *équation de H dans la base B*.

Exemple A33 :
L'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. C'est un plan vectoriel, dont un *vecteur normal* est $u = (1,2,3)$.[2] On notera que les coefficients $u_1, \ldots, u_n$ ne sont pas uniques. ♢

Exemple A34 :
Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) + P'(0) = 0\}$ est un hyperplan, de $\mathbb{R}_2[X]$. ♢

B Applications linéaires

1 Noyau et image

⚠ Pour parler d'application linéaire (ou de *morphisme d'espaces vectoriels*) il faut que les espaces d'arrivées et de départ soit des espaces vectoriels (et on le vérifiera à chaque fois !).

📅 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que

- f est un *isomorphisme* si f est bijectif.
- f est un *endomorphisme* si $E = F$.
- f est un *automorphisme* si $E = F$ et f est bijectif ("auto"="endo"+"iso").

2. À revoir à la lumière du chapitre sur les espaces vectoriels euclidiens.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit le noyau et l'image de F

$$\ker f = \{x \in E / f(x) = 0\}, \quad \operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, f(x) = y\}.$$

On rappelle que le noyau et l'image d'un morphisme sont des sous-espaces respectifs de E et F. C'est une méthode élégante pour montrer qu'un ensemble donné est un (sous-) espace vectoriel.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, on définit le rang de f par :

$$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im} f).$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

(i) f est injective si, et seulement si, $\ker f = \{0\}$.
(ii) f est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im} f = F$.

Théorème B1 *Théorème du rang*

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont de dimension finie, et

$$\dim(\ker f) + \operatorname{rg} f = \dim E.$$

Ce théorème est fondamental, mais il n'est vrai que si E est de dimension finie.

Corollaire B2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si E est de dimension finie, alors

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

Exemple B3 :
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x,y,z,t) = (5x + 12y + 11z - 49t, -3x - 8y - 5z + 27t, -3x - 9y - 3z + 24t, -x - 3y - z + 8t).$$

On admet que f est une application linéaire.

1. Déterminer une base de $\ker f$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
3. $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

$\diamondsuit$

Exemple B4 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une forme linéaire non-nulle. Montrer que $\ker f$ est un hyperplan de E.
2. Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.

$\diamondsuit$

Exemple B5 :
Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ g = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$. $\diamondsuit$

2 Matrices et applications linéaires

Dans toute cette partie, E et F sont deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie non-nulle.

Définition B6 *Matrice d'une application linéaire*

Soit $B_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et $B_F = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle *matrice de f dans les bases B_E et B_F* la matrice

$$\mathrm{mat}_{B_E, B_F}(f) = \mathrm{mat}_{B_F}(f(B_E)).$$

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, c'est à dire que

$$\mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f+g) = \mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f) + \mathrm{mat}_{B_E,B_F}(g), \quad \mathrm{mat}_{B_E,B_F}(\lambda f) = \lambda\,\mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f).$$

Mais surtout, cette application est une bijection : on retient donc que "les matrices et les applications linéaires, c'est la même chose" (lorsqu'on a fixé les espaces vectoriels et leurs bases).

Proposition B7 *Produit matriciel et composition*

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie munis de bases respectives B_E, B_F et B_G.

(i) Pour tous $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$,

$$\mathrm{mat}_{B_E,B_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{B_F,B_G}(g) \times \mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f).$$

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est une bijection si, et seulement si $\mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f)$ est inversible. Dans ce cas, on a alors

$$\mathrm{mat}_{B_F,B_E}\left(f^{-1}\right) = \left(\mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f)\right)^{-1}.$$

Proposition B8 *Formule de changement de bases*

Soit B_E et B'_E deux bases de E et B_F et B'_F deux bases de F. Alors, pour tous $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$,

$$\underbrace{\mathrm{mat}_{B'_E,B'_F}(f)}_{M'} = \underbrace{\mathrm{Pass}(B'_F, B_F)}_{Q^{-1}}\underbrace{\mathrm{mat}_{B_E,B_F}(f)}_{M}\underbrace{\mathrm{Pass}(B_E, B'_E)}_{P}.$$

Exemple B9 :

Soit $M = [m_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$, $m_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant M pour matrice dans la base canonique.
2. En déduire que $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et déterminer M^{-1}.

◊

3 Stabilité

Définition B10 *Stabilité d'un sous-espace vectoriel*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que *F est stable par f* si $f(F) \subseteq F$, i.e.

$$\forall x \in F, \quad f(x) \in F.$$

Exemple B11 :
Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ stables par la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{4}$? Même question pour la rotation vectorielle d'angle π. ♢

Exemple B12 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que F est stable par f.
3. Après avoir justifié que $B = ((1,1,0), (0,1,1), (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de f dans la base B. Que peut-on dire de la forme de cette matrice ?

♢

Pour montrer que F est stable par f, on pourra :

- Montrer que pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.
- Si $B = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base (ou plus généralement une partie génératrice) de F, montrer que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad f(u_i) \in F.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction de f à F, notée $f_{|F}$ et définie par $f_{|F} \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est une application linéaire de F dans E.

Définition/Proposition B13 *Endomorphisme induit*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par f, alors l'application

$$f_{\|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

est un endomorphisme de F. On l'appelle *endomorphisme induit par f sur F*.

Proposition B14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et F_1 et F_2 deux sous-espaces de E munis de bases B_1 et B_2. On suppose que $F_1 \oplus F_2 = E$. Alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) F_1 est stable par f.
(ii) La matrice de f dans $B_1 \cup B_2$ est de la forme

$$\mathrm{mat}_{B_1 \cup B_2}(f) = \begin{bmatrix} A & B \\ (0) & C \end{bmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, $A = \mathrm{mat}_{B_F}\left(f_{\|F}\right)$. Une telle matrice est dite *triangulaire par blocs.*

Proposition B15

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non-nulle et soit $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases respectives $B_1, \ldots, B_p$. On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$. Alors on a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est stable par f.

(ii) Il existe $A_1 \in \mathcal{M}_{\dim F_1}(\mathbb{K}), \ldots, A_p \in \mathcal{M}_{\dim F_p}(\mathbb{K})$ telles que

$$\operatorname{mat}_{B_1 \cup \cdots \cup B_p}(f) = \begin{bmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $A_i = \operatorname{mat}_{B_{F_i}}\left(f_{\|F_i}\right)$.

Une telle matrice est dite *diagonale par blocs.*

Exemple B16 :
Considérons $\mathbb{R}^5$ muni de sa base canonique $B = (e_1, \ldots, e_5)$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la B est $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Alors $\operatorname{Vect}(e_1)$, $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$ et $\operatorname{Vect}(e_4, e_5)$ sont stables par f. Peut-on déterminer d'autres sous-espaces stables ? ♢

Exemple B17 :
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ telle que la matrice dans la base canonique B soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. $\mathbb{R}_1[X]$ est-il stable par f ?
2. $\mathbb{R}_2[X]$ est-il stable par f ?
3. $\operatorname{Vect}\left(X, X^2\right)$ est-il stable par f ?

♢

4 Projecteurs et symétries

Définition B18 *Projecteur et symétrie*
Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. Alors on définit $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur sur F parallèlement à G par

$$p_{\|F} = \operatorname{Id}, \quad p_{\|G} = 0.$$

On définit également $s \in \mathcal{L}(E)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G par

$$s_{\|F} = \operatorname{Id}, \quad s_{\|G} = -\operatorname{Id}.$$

p et s sont liés par la relation $s = 2p - \operatorname{Id}$. F et G sont appelés *espaces caractéristiques* du projecteur p et de la symétrie s.

Exemple B19 :
On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère $F = \operatorname{Vect}(1, 1)$ et $G = \operatorname{Vect}(1, 2)$.

1. Justifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G.
3. En déduire l'expression de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

♢

Proposition B20

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si, et seulement si, $p^2 = p$.

Dans ce cas, p est le projecteur sur $F = \operatorname{Im} p = \{u \in E / p(u) = u\}$ parallèlement à $G = \ker p$.

Proposition B21

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si, et seulement si, $p^2 = \mathrm{Id}$.

Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $F = \{u \in E / s(u) = u\}$ parallèlement à $G = \{u \in E / s(u) = -u\}$.

⚠ On peut reformuler

$$\{u \in E / s(u) = u\} = \ker s - \mathrm{Id}, \quad \{u \in E / s(u) = -u\} = \ker(s + \mathrm{Id}).$$

Exemple B22 :
Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie associée. Montrer que F et G sont stables par p et s. $\diamondsuit$

C Matrices

Les matrices permettent de représenter les applications linéaires et les familles en dimension finie. Certains outils sont propres aux matrices, d'autres propres aux morphismes, et il faut savoir passer de l'un à l'autre pour être le plus efficace possible.

1 Rappels de calcul matriciel

Montrer qu'une famille est une base, qu'une application linéaire est bijective ou qu'une matrice (carrée) est inversible, c'est la même chose. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices inversibles carrées de taille $n \times n$.

Proposition C1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
(ii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = Y$.
(iii) A peut être transformée en I_n par opérations élémentaires sur ses colonnes.
(iv) A peut être transformée en I_n par opérations élémentaires sur ses lignes.
(v) $\ker A = \{0\}$.
(vi) $\operatorname{rg} A = n$.
(vii) $\operatorname{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
(viii) A est la matrice de passage d'une base de $\mathbb{K}^n$ à une autre.
(ix) A est la matrice d'un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.
(x) Les colonnes de A forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
(xi) Les lignes de A forment une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Pour déterminer l'inverse de A, on utilise principalement deux méthodes : la résolution de système (proposition (*ii*)) et le pivot de Gauss[3] (propositions (*iii*) et (*iv*)). C'est affaire de goût, et il faut trouver sa méthode préférée.

Proposition C2

Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration : On a

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

donc AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

Exemple C3 :

Si elle est inversible, déterminer l'inverse de la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. ♢

Proposition C4 *Formule du binôme de Newton*[4]

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Exemple C5 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Indication : on pourra décomposer A de manière astucieuse.
2. Déterminer A^{-1} puis A^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

♢

2 Transposition

Définition C6 *Transposition*

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit *la matrice transposée de A* par

$$A^\intercal = [\widetilde{a}_{i,j}] \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \widetilde{a}_{i,j} = a_{j,i}.$$

3. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : Mathématicien allemand. Légendaire.
4. Isaac Newton (1642-1727) : Mathématicien et physicien anglais. Presque encore plus légendaire.

⚠ On trouve aussi la notation ${}^tA$ (assez répandue). Attention aux expressions du genre A^tB.

Exemple C7 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors $A^\intercal \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $A^\intercal = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. On a échangé lignes et colonnes ! ♢

Exemple C8 :
Donner les transposées des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -9 \\ 5 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \\ -5 & 9 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

♢

Proposition C9 *Transposition et calcul matriciel*

(i) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $(A^\intercal)^\intercal = A$ (on dit que la transposition est une *involution*).

(ii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$(\lambda A + \mu B)^\intercal = \lambda A^\intercal + \mu B^\intercal.$$

(iii) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal.$$

⚠ $(AB)^\intercal = A^\intercal B^\intercal$ est **grossièrement faux** (les dimensions ne permettent en général même pas de faire ce produit matriciel).

Corollaire C10

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^\intercal \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Proposition C11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si, et seulement si $A^\intercal$ est inversible, et dans ce cas on a

$$(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal.$$

Proposition C12

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.

Définition C13 *Matrice symétrique et matrice antisymétrique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *symétrique* si $A^\intercal = A$. On dit que A est *antisymétrique* si $A^\intercal = -A$. On note

$$S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M^\intercal = M\}, \quad A_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M^\intercal = -M\}.$$

Exemple C14 :
Les matrices suivantes sont-elles symétriques ? Antisymétriques ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_n, \quad O_n.$$

♢

⚠ Les matrices antisymétriques ont une diagonale nulle.

Proposition C15

Les ensembles $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemple C16 :

1. Montrer que $\Phi : A \mapsto A^\intercal$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer ses ensembles caractéristiques.
2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

♢

3 Trace

Définition C17 *Trace d'une matrice*

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on définit la *trace de la matrice* A par la somme de ses termes diagonaux :

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exemple C18 :
On a $\operatorname{Tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2 - 6 + 4 = 0$. Attention, une matrice de trace nulle n'est pas forcément nulle (deux matrices ayant la même trace ne sont en général pas égales). ♢

Proposition C19 *Trace et calcul matriciel*

(i) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\operatorname{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \operatorname{Tr}(A) + \mu \operatorname{Tr}(B).$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{Tr}(A^\intercal) = \operatorname{Tr}(A).$$

(iii) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Corollaire C20

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition/Proposition C21 *Trace d'un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non-nulle muni d'une base B et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit la *trace de l'endomorphisme* f par

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}_B(f)).$$

La trace de f est bien définie et ne dépend pas du choix de la base B.

Exemple C22 :
En dimension finie, montrer que le rang d'un projecteur est égal à sa trace. ♢

4 Matrices semblables

Définition C23 *Matrices semblables*

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que *$A$ et A' sont semblables* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$.

Remarque C24 : Autrement dit (d'après la formule du changement de base), deux matrices sont semblables si (et seulement si) elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes. On ne dit pas quelque chose comme "A est semblable à A'" car la relation "être semblable à" est symétrique :

$$A' = P^{-1}AP \iff A = Q^{-1}A'Q,$$

avec $Q = P^{-1}$. ♢

Proposition C25

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors :

(i) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$.
(ii) $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$.

Exemple C26 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que $A^\intercal$ et $B^\intercal$ sont semblables. ♢

D Exercices

Exercice 2.1

Démontrer les propriétés suivantes :

1. Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ et $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall i, j \in \{1,2,3\}, \quad Q_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$
Montrer que la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est libre.
2. Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$v \circ u = 0 \iff \operatorname{Im} u \subseteq \ker v.$$
3. Soit $f : P \mapsto XP'(X+1) - P$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n = 4$, donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ tel que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg\left(f\left(X^k\right)\right) = k.$$
Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 2.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 12 \\ -2 & -1 & 8 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer ses espaces caractéristiques, dont on donnera une base et une équation cartésienne.

Exercice 2.3

On définit $\operatorname{Tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \operatorname{Tr}(M) \end{array}$.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \ker \operatorname{Tr} \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.
3. Montrer que, pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^\intercal)$.
4. Montrer que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Exercice 2.4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Le sous-espace $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\right\}$ est-il stable par f ?
2. Même question pour $G = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$.

Exercice 2.5

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si, et seulement si, A et B commutent.

Exercice 2.6

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique B_0 et les deux sous-espaces vectoriels suivants :
$$F = \operatorname{Vect}\left(X - 1, X^2 - 1\right), \quad G = \operatorname{Vect}\left(X^2 - X + 1\right).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. On note $B = \left(X - 1, X^2 - 1, X^2 - X + 1\right)$.
   (a) Justifier que B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Ecrire la matrice de passage de B_0 à B.
3. On note p la projection sur F parallèlement à G.
   (a) Ecrire la matrice de p dans la base B.
   (b) En déduire la matrice de p dans la base canonique.
4. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.
5. Calculer $s\left(X^2+X+1\right)$ et $p\left(X^2-2X+2\right)$.

Exercice 2.7

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Tr}(f)$.

Exercice 2.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(p,q) \in \mathcal{L}(E)$ tels que p et $p \circ q$ soit des projecteurs de E. Montrer que $p \circ q \circ p$ est aussi un projecteur.

Exercice 2.9

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et on pose

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0,0),(0,0,1,0)\right), \quad G = \mathrm{Vect}\left((1,0,1,0),(0,0,0,1)\right), \quad H = \mathrm{Vect}\left((1,0,0,1),(0,1,0,0)\right).$$

1. Déterminer $F \cap G$, $G \cap H$ et $F \cap H$.
2. Les sous-espaces F, G et H sont-ils en somme directe ?

Exercice 2.10

Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 2.11

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels distincts, et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto e^{r_n x}$. On définit alors la famille $G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que G est libre.

Exercice 2.12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u, p \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur de E. Montrer que $p \circ u = u \circ p$ si, et seulement si, $\ker p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par u.

Exercice 2.13

On considère la famille $C = \left(x \mapsto \cos(kx)\right)_{k\in\mathbb{N}}$. La famille C est-elle libre ?

Exercice 2.14

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique B et $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ tel que

$$A = \mathrm{mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Calculer A^2, $(A-I_4)^2$ et $A^2(A-I_4)^2$.
3. On note $F_1 = \ker\left(f^2\right)$ et $F_2 = \ker\left((f-\mathrm{Id})^2\right)$.
   (a) Déterminer les dimensions de F_1 et F_2 et montrer qu'ils sont supplémentaires.
   (b) Montrer que F_1 et F_2 sont stables par f.
4. (a) Montrer que $F_2 = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$ et $F_1 = \mathrm{Im}\left((f-\mathrm{Id})^2\right)$.

(b) Trouver une base B' de $\mathbb{R}^4$ telle que $\mathrm{mat}_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.15

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $X = 0 \iff \mathrm{Tr}(X^\intercal X) = 0$.
2. On suppose dans cette question que $(I_n + M) X = 0$.
   (a) Montrer que $(MX)^\intercal (MX) = -X^\intercal X$.
   (b) En déduire que $X = 0$
3. Montrer que $I_n + M$ est inversible.

Exercice 2.16

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = AB - BA$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^p) = 0$.

Exercice 2.17

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non-nulle et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^q = I_n$. On définit $B = \dfrac{1}{q}\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} A^k$.
   (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p B = B$.
   (b) En déduire que $B^2 = B$. Comment interpréter ce résultat ?
   (c) Montrer que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Im}(B)$.
   (d) En déduire que

$$\dim\ker(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}\left(A^k\right).$$

Exercice 2.18

Partie 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice fixée dans toute cette partie. On définit $f_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_M(A) = A^\intercal M.$$

1. Montrer que f_M est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que f_M est une bijection si, et seulement si, M est une matrice inversible, puis déterminer f_M^{-1}.

Partie 2

On définit l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A^\intercal B) \end{array}$$

3. Montrer que, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $A \mapsto \Phi(A, B)$ est linéaire. On admet que, de même, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $B \mapsto \Phi(A, B)$ est linéaire.
4. Montrer que Φ est symétrique, c'est-à-dire que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A, B) = \Phi(B, A)$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\Phi(A, A) \geq 0$.
   (b) Montrer que $\Phi(A, A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0$.

On dit qu'une application Φ vérifiant ces propriétés est un *produit scalaire* sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2.19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ des projecteurs de E.

1. Montrer que $(p \circ q = p) \iff (\ker q \subseteq \ker p)$.
2. Montrer que ($p + q$ est un projecteur) $\iff$ $(p \circ q = q \circ p = 0)$.
3. On suppose maintenant que $p + q$ est un projecteur.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Im}(q)$.
   (b) Montrer que $\ker(p + q) = \ker(p) \cap \ker q$.

CHAPITRE III

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

❝ *Vers l'infini et au-delà !* ❞

Toy Story

Pré-requis :

- Intégration sur un segment
- Primitives

	☹	😐	☺
Connaître et mettre en œuvre le plan d'étude d'une intégrale généralisée			
Savoir revenir à la définition pour étudier la nature ou la valeur d'une intégrale généralisée			
Maîtriser le changement de variable et l'intégration par parties dans le cadre des intégrales généralisées			
Savoir appliquer les théorèmes de comparaison et d'équivalence de fonctions positives			
Étudier la convergence absolue d'une intégrale généralisée			

Dans tout ce chapitre, I est un intervalle non-trivial (qui possède au moins deux éléments) de $\mathbb{R}$.

A Intégrale généralisée

1 Intégration sur un intervalle

Définition A1 *Intégrale généralisée à droite*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R})$ avec $a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ *converge* si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_{[a,x]} f(t)\, dt$ existe et est finie. On définit alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_{[a,x]} f(t)\, dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge.*

On dit que b est une *borne incertaine* pour l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque A2 :

- On parle d'intégrale généralisée (ou d'intégrale *impropre*) car il ne s'agit plus tout à fait de l'intégrale (sur un segment $[a,b]$) construite en première année. Il s'agit d'une généralisation de cette intégrale aux fonctions continues sur un intervalle semi-ouvert.
- Cette définition a bien un sens car f est bien continue sur $[a,x]$ pour tout $x \in]a,b[$.
- On dit qu'une intégrale généralisée $\int_a^b f$ *converge* car il y a une notion de limite dans la définition. Le terme reste mal choisi, on devrait plutôt dire que l'intégrale $\int_a^b f$ *existe.*

♢

On remarque que, si $b \in \mathbb{R}$ et si $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et elle coïncide avec l'intégrale sur un segment :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f(t)\,dt.$$

Exemple A3 :
Notons $f(t) = \frac{1}{t^2}$. $f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[)$, on peut donc étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$. On a, pour tout $x > 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=1}^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

♢

Proposition A4 *Relation de Chasles*[1]
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$ avec $a < b \leq +\infty$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \iff \forall c \in]a,b[, \int_c^b f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

⚠ Il est fondamental de vérifier la convergence d'une intégrale généralisée avant d'écrire des formules faisant intervenir cette intégrale

Définition A5 *Intégrale généralisée à gauche*

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(]a,b],\mathbb{R}\right)$ avec $-\infty \leq a < b$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *converge* si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_{[x,b]} f(t)\,dt$ existe et est finie. On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} \int_{[x,b]} f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple A6 :
Notons $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Il est clair que $f \in \mathcal{C}^0\left(]0,1]\right)$. Étudions donc la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$. On a, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{t=x}^1 = \frac{1}{x} - 1.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$. $\diamondsuit$

Proposition A7 *Relation de Chasles*
Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(]a,b],\mathbb{R}\right)$ avec $-\infty \leq a < b$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \iff \forall c \in]a,b[, \int_a^c f(t)\,dt \text{ converge.}$$

Dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Définition/Proposition A8 *Intégrale généralisée*

Soit $f \in \mathcal{C}^0\left(]a,b[,\mathbb{R}\right)$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *converge* s'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent. On pose alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge.*

1. Michel Chasles (1793-1880) : Mathématicien français.

La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas du point $c \in]a,b[$ choisi. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} &\iff \exists c \in]a,b[, \quad \int_a^c f \text{ et } \int_c^b f \text{ convergent}\\ &\iff \forall c \in]a,b[, \quad \int_a^c f \text{ et } \int_c^b f \text{ convergent.}\end{aligned}$$

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,dt$. Enfin, si $a < b$, on dit que $\displaystyle\int_b^a f$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^b f$ converge, et dans ce cas on définit

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Pour étudier une intégrale généralisée à gauche et à droite, on la découpe pour ne traiter qu'une seule borne incertaine à la fois.[2]

Exemple A9 :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge car $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge. ♢

Exemple A10 :
Étudier la nature des intégrales suivantes, puis déterminer leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(1+e^{-t})}$.

♢

2 Propriétés héritées de l'intégrale sur un segment

Proposition A11

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors

(i) Si $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,dt$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,dt$ converge et

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_I f(t)\,dt + \mu \int_I g(t)\,dt.$$

(ii) Si $f \geq 0$ et $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge alors $\displaystyle\int_I f(t)\,dt \geq 0$.

(iii) Si $f \leq g$ et $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_I g(t)\,dt$ convergent, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,dt \leq \int_I g(t)\,dt$.

2. C'est-à-dire une seule limite à la fois.

Proposition A12

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors :

(i) Si $f = 0$ alors $\int_I f(t)\,dt = 0$.

(ii) Si $\int_I f(t)\,dt = 0$ et f est de signe constant, alors $f = 0$.

Proposition A13

Soit $f \in \mathcal{C}^0(]-b, b[)$ avec $0 < b \leq +\infty$.

(i) Si f est impaire, alors les intégrales $\int_0^b f(t)\,dt$ et $\int_{-b}^0 f(t)\,dt$ ont même nature. De plus, si elles convergent, alors

$$\int_b^b f(t)\,dt = 0.$$

(ii) Si f est paire, alors les intégrales $\int_0^b f(t)\,dt$ et $\int_{-b}^0 f(t)\,dt$ ont même nature. De plus, si elles convergent, alors

$$\int_b^b f(t)\,dt = 2\int_0^b f(t)\,dt.$$

⚠ sin est impaire et pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\ dt$ diverge.

Exemple A14 :

1. Étudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\ dt$.
2. Étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$.
   Indication : on pourra effectuer une décomposition en éléments simples.

♢

Théorème A15 *Fonction prolongeable par continuité*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R})$. Si $b \in \mathbb{R}$ et si f admet une limite finie en b^-, alors $\int_a^b f$ converge.

Comme tous les résultats dans la suite, cette proposition se transpose sans problèmes pour les intégrales généralisées à gauche.

Exemple A16 :

Étudier la nature de $\int_0^1 \frac{1 + 2\sin t - e^{2t}}{t^2} dt$. ♢

3 Intégrales de Riemann

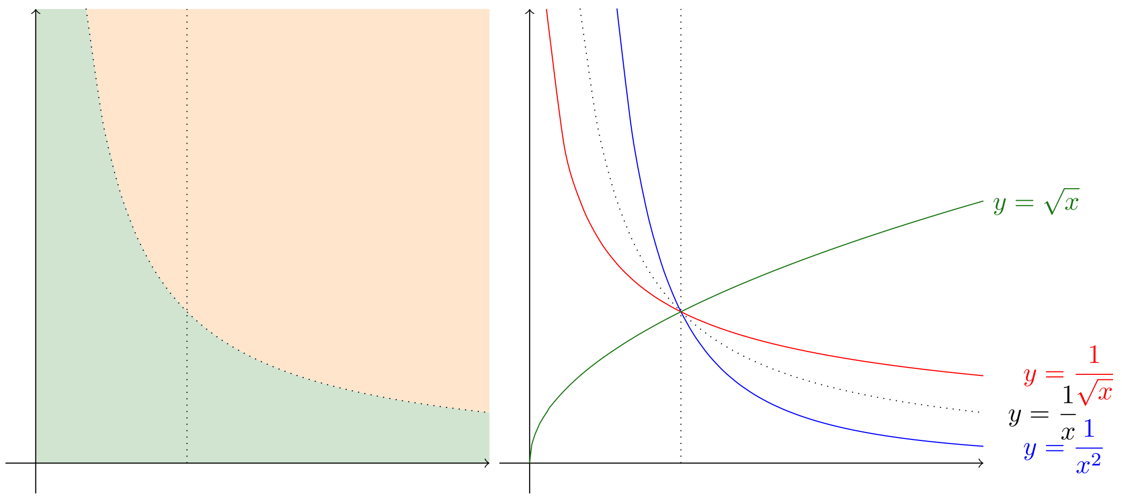
Théorème A17 *Critère de Riemann*[3]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

(i) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

(ii) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Les intégrales de Riemann sont fondamentales, car elles donnent une idée de "quelle intégrale converge ou ne converge pas" (pour des fonctions positives).



4 Cas des fonctions à valeurs complexes

Définition A18 *Partie réelle et partie imaginaire*

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$. On définit les fonctions $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ par

$$\mathfrak{Re}(f) : x \mapsto \mathfrak{Re}(f(x)), \quad \mathfrak{Im}(f) : x \mapsto \mathfrak{Im}(f(x)).$$

On dit que f est *continue en* $x_0 \in I$ (resp. sur I) si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues en x_0 (resp. sur I). On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur I.

Exemple A19 :

Montrer que les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+ix}$ et $g : x \mapsto e^{ix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Définition A20 *Intégrale d'une fonction complexe*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$. On définit alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)\,dt.$$

3. Berhard Riemann (1826-1866) : Mathématicien allemand.

⚠ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est un nombre complexe. Cette définition a bien un sens car $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et donc les intégrales (sur un segment) $\displaystyle\int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)\,dt$ existent.

Les intégrales de fonctions complexes vérifient toutes les propriétés des intégrales de fonctions réelles (Chasles, linéarité, etc.). Attention, on n'a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, et l'intégrale n'est donc pas monotone sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

Exemple A21 :
Après avoir justifié leur existence, calculer les intégrales

$$\int_0^\pi e^{it}dt, \quad \int_0^1 \frac{dt}{1+it}, \quad \int_1^e \left(\ln t + \frac{i}{t}\right) dt.$$

♢

Définition A22 *Intégrale généralisée d'une fonction complexe*
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$. On dit que $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge si $\displaystyle\int_I \mathfrak{Re}(f)(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_I \mathfrak{Im}(f)(t)\,dt$ convergent, et on note alors

$$\int_I f(t)\,dt = \int_I \mathfrak{Re}(f)(t)\,dt + i\int_I \mathfrak{Im}(f)(t)\,dt.$$

🔧 Pour étudier une fonction à valeurs complexes, on étudiera simplement sa partie réelle et sa partie imaginaire (continuité, intégrale, etc.)

Exemple A23 :
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+it}$. ♢

B Fonctions positives et intégrabilité

1 Comparaison et équivalence de fonctions positives

Théorème B1 *Comparaison des fonction positives*
Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{R})$ avec $a < b \leq +\infty$. On suppose que f et g sont positives sur $[a,b[$ et que $f \leq g$ sur $[a,b[$. Alors

(i) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge et

$$0 \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Exemple B2 :
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\sin\left(3t^2 - 4\cos t\right)}{t^2}$ converge. ♢

Théorème B3 *Équivalence des fonctions positives*

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R})$ avec $a < b \leq +\infty$. On suppose que f et g sont positives sur $[a, b[$ et que $f \underset{b^-}{\sim} g$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge} \iff \int_a^b g(t)\,dt \text{ converge.}$$

On pourra remarquer que, puisque $f \sim g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de b. En particulier, il suffit de vérifier que l'une est positive, et la seconde l'est automatiquement.

Exemple B4 :
Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2}$ converge de trois manières différentes. ♢

Exemple B5 :
Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t+t^3} dt$ est une intégrale convergente.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t+t^3} dt$ converge.
2. (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\ln t \leq t$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t+t^3}$ converge.

♢

Remarque B6 : Les théorèmes de comparaison et d'équivalence des fonctions positives sont extrêmement importants lorsqu'on ne sait pas calculer directement la primitive d'une fonction (dans la plupart des cas, en fait). Comme on l'a déjà vu dans l'exemple précédent, les conclusions de ces théorèmes restent valable dans plusieurs cas plus généraux :

- f et g sont positives sur un voisinage (à gauche) de b (on restreint à un intervalle du type $[c, b[$).
- f et g sont négatives sur $[a, b[$.
- on étudie une intégrale généralisée à gauche (avec les relations de comparaison ou d'équivalence correspondantes en a^+).

♢

⚠ Ce théorème est faux pour les fonctions dont le signe n'est pas constant, ou plus généralement pour les fonctions à valeurs complexes.

Exemple B7 :
Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$. ♢

2 Intégrabilité sur un intervalle

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition B8 *Absolue convergence et intégrabilité*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On dit que $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ est *absolument convergente* si $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ converge. On dit aussi que

f est *intégrable* sur I. On note

$$L^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}) \;/\; \int_I |f(t)|dt \text{ converge} \right\}.$$

Si $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge mais que f n'est pas intégrable, on dit que $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ est *semi-convergente.*

⚠ Contrairement à ce qu'on pourrait croire au premier abord, la définition n'est pas "f est intégrable si son intégrale converge", mais bien si $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ converge.

Si f est positive (ou plus généralement, de signe constant au voisinage des bornes incertaines), alors f est intégrable si, et seulement si, son intégrale converge.

Théorème B9

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge absolument, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge.

⚠ Il existe des fonctions donc l'intégrale est semi-convergente. En effet, on peut montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ converge,} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \text{ diverge.}$$

Proposition B10 *Inégalité triangulaire*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. Si $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge absolument, alors

$$\left|\int_I f(t)\,dt\right| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

⚠ Pour écrire une telle inégalité, il faut avoir vérifié au préalable que les deux intégrales convergent. [4]

Proposition B11

$L^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(I)$.

C Intégrales généralisées en pratique

1 Changement de variable

4. Or, si $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ converge, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,dt$ converge : ouf !

Théorème C1 *Changement de variable*
Soit $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Soit Φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]\alpha, \beta[$. Posons

$$\Phi(\alpha) = \lim_{\alpha^+} \Phi, \quad \Phi(\beta) = \lim_{\beta^-} \Phi.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(]\Phi(\alpha), \Phi(\beta)[)$. Alors

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u)\, du \text{ converge} \iff \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\, \Phi'(t)\, dt \text{ converge.}$$

De plus, si les intégrales convergent, alors on a

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(b)} f(u)\, du = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\, \Phi'(t)\, dt.$$

On dit qu'on fait le changement de variable "$u = \Phi(t)$".

⚠ En pratique, on aura plutôt des intégrales du type $\displaystyle\int_a^b f(\Psi(u))\, du$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On veut donc pouvoir écrire (sous réserve de convergence des intégrales) :

$$\int_a^b f(\Psi(u))\, du \underset{t=\Psi(u)}{=\!=\!=} \int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(t) \left(\Psi^{-1}\right)'(t)\, dt.$$

Or, si Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, alors $\Phi = \Psi^{-1}$ l'est aussi et on peut appliquer le théorème C1.

🔧 On évitera de retenir toute formule compliquée pour les changements de variables abstraits pour se concentrer sur l'essentiel : on peut faire un changement de variable dans une intégrale généralisée quand celui-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. Le changement des bornes, du $f(t)$ et du "dt" fonctionne comme pour les intégrales sur un segment.

⚠ Un changement de variable peut changer une intégrale "classique" en une intégrale généralisée et inversement. A condition de le remarquer, cela ne pose aucun problème.

Exemple C2 :
Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}}$. ♢

Exemple C3 :
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\ dt$. ♢

Exemple C4 :
Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ et déterminer sa valeur si elle converge. ♢

2 Intégration par parties

⚠ <u>On ne fait pas</u> d'intégration par parties avec des intégrales généralisées. Par exemple, dans le cas de fonctions continues sur $[a, b[$, on fera l'intégration par parties classiques sur $[a, x]$ avant de passer à la limite quand $x \to b$.

Exemple C5 :
Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t^2)} dt$, et calculer sa valeur en cas de convergence. ♢

Exemple C6 :

Calculer de deux manières différentes l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t e^{-2t} dt$. ♢

⚠ On n'écrira pas

$$\int_0^{+\infty} \sin t e^{-2t} dt = \left[-\cos t e^{-2t} - 2\sin t e^{2t}\right]_{t=0}^{+\infty} - 4\int_0^{+\infty} \sin t e^{-2t} dt.$$

C'est extrêmement dangereux car on ne s'assure pas de l'existence des quantités manipulées (intégrales, limites...) Il existe des théorèmes permettant de faire des intégration par parties sur des intervalles, mais ils sont hors-programme délicats à manipuler et n'offrent pas de réel gain de temps ou de calculs.

Exemple C7 :

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$.
2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$.
   Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.
3. Déduire des questions précédentes la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx$.

♢

3 Plan d'étude

🔧 Comment étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$:

0. On étudie la continuité de f sur $[a,b], [a,b[,]a,b]$ ou $]a,b[$. S'il y a deux bornes incertaines, on découpe l'intégrale pour étudier deux problèmes simples.

Dans la suite, on se place dans le cas où b est l'unique borne incertaine.

1. Si b est fini, on se demande si $\lim\limits_{t\to b^-} f(t)$ est finie (fonction prolongeable par continuité).
2. Sinon, on essaie de déterminer une primitive F de f et on étudie l'existence de $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ (retour à la définition).
3. Sinon, si f est de signe constant, on essaie de la comparer (équivalent, majoration, minoration) avec une fonction plus simple (comparaison ou équivalence des fonctions à termes positifs).
4. Sinon, on considère $|f|$ et on essaie de montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge (convergence absolue).
5. Sinon, on essaie de trouver une intégration par parties ou un changement de variables qui nous ramène à une intégrale plus simple à étudier.
6. Sinon...

Exemple C8 :
Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$. ♢

D Exercices

<u>EXERCICE 3.1</u>
Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{\sin t}} dt.$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^2}.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

Exercice 3.2

Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t^3}.$

   Indication : on pourra vérifier que $\displaystyle\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}.$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3+t}.$

   Indication : on pourra effectuer une décomposition astucieuse de la forme $\displaystyle\frac{1}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}.$

Exercice 3.3

Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\ln t \; dt.$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t-t^3}.$

   Indication : on pourra vérifier que $\displaystyle\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}.$
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{tdt}{t^4-1}.$

   Indication : on pourra effectuer une décomposition astucieuse de la forme $\displaystyle\frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{c-1}.$

Exercice 3.4

Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} te^{-t^2} dt.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t dt.$
3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\sin t dt.$

Exercice 3.5

Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\sin t \; dt.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^5 dt}{\sqrt{1-t^3}}.$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^4} dt.$

Exercice 3.6
Étudier la nature des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$.
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$.
3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(3t)\, e^{-t} dt$.

Exercice 3.7
Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\alpha x}}{\operatorname{ch} x} dx$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.8
Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-t} \ln t \; dt$.
Indication : on pourra comparer cette intégrale à une intégrale de Riemann bien choisie.

Exercice 3.9
Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx, \quad \int_0^1 \frac{\sin x}{e^x - 1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Exercice 3.10

1. (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ converge.

   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ converge.
2. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx$ converge.

Exercice 3.11
Soit $\alpha \leq 0, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt, \quad \int_0^{+\infty} \ln(1 - \operatorname{th} t)\, dt.$$

Exercice 3.12
Étudier la convergence des intégrales suivantes, et déterminer leur valeur en cas de convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.
   Indication : on pourra vérifier que $\displaystyle\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2(x+3)}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - x \arctan \frac{1}{x}\right) dx$.
   Indication : on pourra effectuer un changement de variable bien choisi.

Exercice 3.13

1. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge sans en déterminer une primitive.
2. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ par intégration par parties.

Exercice 3.14

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Sous réserve de convergence de l'intégrale, on définit une nouvelle fonction, appelée *transformée de Laplace de* f :

$$L(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt.$$

1. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors sa transformée de Laplace est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que l'application L est linéaire sur l'ensemble des fonctions continues bornées.
3. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et que f et f' sont bornées, alors

$$\forall p > 0, \quad L(f')(p) = -f(0) + pL(f)(p).$$

Exercice 3.15

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$1 - \ln 2 + \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n.$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

Exercice 3.16

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(t^2+t+1)^2}$.

Exercice 3.17

Soit f et g deux fonctions strictement positives sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$. On suppose que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t))$ et que $\displaystyle\int_a^b g$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Exercice 3.18

On appelle intégrale de Dirichlet l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

1. (a) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente.

   (b) En raisonnant par intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente.
   (c) Conclure quant à la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

2. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ puis que, pour tout $n \geq 2$,
$$1 - \ln 2 + \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin t| dt$.
   (d) Montrer que l'intégrale de Dirichlet ne converge pas absolument.
   Indication : on pourra découper l'intégrale sur des segments de la forme $[2(n-1)\pi, 2n\pi]$.

CHAPITRE IV

COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

> “ *Les mathématiques consistent à prouver des choses évidentes par des moyens complexes.* ”
>
> George Pólya

	☹	😐	☺
Savoir ramener un évènement à une union/intersection d'évènements simples			
Différencier $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A\|B)$			
Savoir appliquer la formule des probabilités totales			
Déterminer la loi d'une variable aléatoire			
Calculer une espérance ou une variance			
Utiliser le théorème de transfert et les propriétés de l'espérance et de la variance pour faire des calculs sans loi explicite			
Déterminer une loi conjointe			
Étudier l'indépendance d'évènements ou de variables aléatoires			
Calculer une covariance ou un coefficient de corrélation linéaire			

Pré-requis :

- Probabilités finies
- Variables aléatoires
- Indépendance et probabilités conditionnelles.

Dans tout ce chapitre, Ω est un ensemble fini, appelé *univers*, et $\mathbb{P}$ est une *probabilité* sur Ω. On dit donc que $(\Omega, \mathbb{P})$ est un *espace probabilisé*.

A Rappels de première année

1 Évènements et probabilités

📅 Un évènement est un *sous-ensemble* de l'univers Ω, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathbb{P}$ est une application de l'ensemble des évènements $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ telle que

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Proposition A1 *Règles de calculs de probabilités*

Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

(i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
(iii) Si $A \subseteq B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
(v) $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On note $A \sqcup B$ lorsque l'union de A et B est *disjointe*, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

Il est absurde d'obtenir une probabilité négative ou supérieure à 1 ; cela montre qu'on n'a rien compris. Si un tel cas se produisait en concours, il faut absolument revoir les calculs. [1]

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On définit la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur Ω. Par convention, si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose $\mathbb{P}(A|B) = 0$.

Proposition A2 *Formule de Bayes* [2]

Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{P}(B|A).$$

Proposition A3 *Formule des probabilités totales*

Soit $n \geq 2$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ un système complet d'évènements.

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k) \mathbb{P}(A_k).$$

Proposition A4 *Formule des probabilités composées*

Soit $n \geq 2$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2|A_1) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

On rappelle que deux évènements A, B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Cela équivaut à $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ (quand ces probabilités sont définies).

Pour écrire $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, il faut justifier que A et B sont incompatibles (i.e. en termes d'ensembles, que l'union est disjointe). Pour écrire $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, il faut justifier que A et B sont indépendants !

Il ne faut pas confondre $A \cap B$ et $A|B$! C'est une question de modélisation intuitive.

1. Revoir les calculs ne signifie pas transformer le - en + par magie.
2. Thomas Bayes (1702-1761) : Mathématicien et pasteur anglais.

Exemple A5 :
On considère deux lancers de dé successifs. On note A l'évènement "le premier nombre obtenu est 4" et B l'évènement "le deuxième nombre obtenu est strictement supérieur au premier". Déterminer la valeur des probabilités suivantes (si elles sont bien définies) :

$$\mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cup B), \quad \mathbb{P}(A|B), \quad \mathbb{P}(B|A).$$

$\diamondsuit$

2 Variables aléatoires

Formellement, une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On la considère plutôt **comme un nombre**,[3] qui peut prendre différentes valeurs suivant l'issue de l'expérience aléatoire considérée.

Caractériser une variable aléatoire revient à déterminer :

(i) son image $X(\Omega)$
(ii) sa loi $\mathbb{P}_X$, c'est-à-dire déterminer $\mathbb{P}(X = i)$ pour tout $i \in X(\Omega)$.

En première année et dans ce chapitre, on ne considère que des variables aléatoires X finies, c'est-à-dire dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble fini.

On connaît plusieurs lois usuelles, qu'il faut absolument savoir identifier dans les exercices :

- X suit une loi certaine $X \hookrightarrow \delta_a$ si $X(\Omega) = \{a\}$. X prend toujours la valeur a.
- X suit une loi de Bernoulli[4] $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

  $$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

  Cela correspond à une expérience avec deux issues possibles : succès/échec, pile/face, etc.
- X suit une loi binomiale $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

  $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

  Cette variable aléatoire compte le nombre de succès dans n expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de réussite p. Cas particulier : $\mathscr{B}(1, p) = \mathscr{B}(p)$.
- X suit une loi uniforme $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a, b]\!])$ si $X(\Omega) = \{a, \dots, b\}$ et

  $$\forall k \in [\![a, b]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

  X prend toutes les valeurs entre a et b avec la même probabilité.

Proposition A6

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors $(\{X = i\})_{i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements. En particulier

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) = 1.$$

3. On utilise donc des abus de notation propres aux nombres et des notations de fonctions. Pour ceux qui ne sont pas à l'aise, on se contentera d'utiliser les notations de fonctions.
4. Jacques Bernoulli (1654-1705) : Mathématicien et physicien suisse. Et pas "Bernouilli".

📅 On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

La fonction de répartition caractérise la loi de X. Il faut savoir tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont on connaît la loi, et inversement déterminer la loi d'une variable aléatoire dont on connait la fonction de répartition.

Exemple A7 :
Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X. ♢

Exemple A8 :
Soit X une variable aléatoire finie de fonction de répartition F_X.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \in [0,1]$.
2. Montrer que F_X est croissante.
3. Montrer que

$$\exists t_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \leq t_1, \quad F_X(t) = 0.$$

4. Montrer que

$$\exists t_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq t_2, \quad F_X(t) = 1.$$

♢

Exemple A9 :
Dans les expériences suivantes, décrire la loi de X et tracer sa fonction de répartition :

1. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On en choisit 5 au hasard que l'on aligne afin de former un mot de 5 lettres. X est le nombre de voyelles dans ce mot.
2. On range 20 objets dans 3 tiroirs. X est le nombre d'objets dans le premier tiroir.
3. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X est le nombre de bosses.
4. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. X est le nombre de boules vertes tirées.
5. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de cœur. X est le nombre de cartes que l'on a retournées.
6. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
7. On forme un jury de 6 individus choisis au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. X est le nombre de femmes dans ce jury.
8. On suppose que 1% des trèfles possèdent quatre feuilles. On cueille 100 trèfles. X est le nombre de trèfles à quatre feuilles cueillis.

♢

📅 On appelle *espérance de* X le nombre réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i\mathbb{P}(X = i).$$

L'espérance est la "valeur moyenne" de X.

📅 On appelle *variance de* X le nombre réel :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

La variance est le carré de l'écart entre X et son espérance (en moyenne). Cela représente la dispersion de X par rapport à sa moyenne. D'un point de vue de l'homogénéité, pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire, on préférera regarder son écart-type $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition A10 *Manipulation d'espérance et de variance*
Soient X, Y deux variables aléatoires finies.

(i) Théorème de transfert : pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{i \in X(\Omega)} \varphi(i) \mathbb{P}(X = i).$$

(ii) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et X, Y variables aléatoires finies, on a

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

(iii) Formule de Kœnig[5]-Huygens[6] : pour toute variable aléatoire X, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

(iv) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et X variable aléatoire finie, on a

$$\mathbb{V}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \mathbb{V}(X).$$

On admet qu'une variable aléatoire a une variance nulle si, et seulement si, elle suit une loi certaine. Autrement dit, une "vraie" variable aléatoire (de loi non-certaine) aura toujours une variance strictement positive.

Proposition A11 *Lois usuelles*
On a le tableau suivant :

Loi	Paramètre(s)	Image	Type	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \delta_a$	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	Certaine	a	0
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	Finie	p	$p(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[$	$[\![0,n]\!]$	Finie	np	$np(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$	$a, b \in \mathbb{Z}, a < b$	$[\![a,b]\!]$	Finie	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Exemple A12 :
Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de loi binomiale. $\diamondsuit$

Exemple A13 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $\mathscr{U}([\![1,n]\!])$.

1. Calculer l'espérance de X.
2. Calculer la variance de X.

$\diamondsuit$

Exemple A14 :
On dit qu'une variable aléatoire est *centrée* si son espérance est nulle. On dit qu'elle est *réduite* si sa variance vaut 1. Soit X une variable aléatoire de loi non-certaine. Montrer que la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ est centrée et réduite. $\diamondsuit$

5. Johann Kœnig (1712-1757) : Mathématicien allemand.
6. Christiaan Huygens (1821-1894) : Mathématicien, astronome et physicien néerlandais. Prononcer œilrrreunss

Proposition A15 *Inégalité de Bienaymé[7]-Tchebychev[8]*
Soit X une variable aléatoire finie. Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}\left(X\right)| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(X\right)}{a^2}.$$

B Couples de variables aléatoires

Dans la suite, même si ce n'est pas mentionné, on ne s'intéresse qu'aux variables aléatoires finies. À condition de donner un sens aux variables aléatoires dans un cadre plus général (ce qu'on fera dans un autre chapitre), il n'y a aucun problème pour généraliser ces résultats.

1 Loi conjointe de variables aléatoires

Définition B1 *Couple de variables aléatoires*
Soit X, Y deux variables aléatoires. Le couple (X, Y) est appelé *couple de variables aléatoires.*

La *loi conjointe de X et Y* est la loi du couple (X, Y), qui est définie par la donnée des $\mathbb{P}\left(X = i \text{ et } Y = j\right)$ pour tous $i \in X\left(\Omega\right)$ et $j \in Y\left(\Omega\right)$.

Les *lois marginales du couple* (X, Y) sont les lois de X et les lois de Y.

Exemple B2 :
On pioche une boule dans une urne contenant trois boules vertes portant les numéros 1,2 et 3, deux boules rouges portant les numéros 1 et 2 et trois boules bleues portant les numéros 2,3 et 4. On définit X la variable aléatoires égale au numéro inscrit sur la boule tirée. On définit Y la variable aléatoire valant 0 (resp. 1 ou 2) si la boule tirée est verte (resp. rouge ou bleue). Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y). ♢

Proposition B3
Soit X et Y deux variables aléatoires. Alors

(i) Pour tout $i \in X\left(\Omega\right)$,
$$\mathbb{P}\left(X = i\right) = \sum_{j \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\left(X = i \text{ et } Y = j\right).$$

(ii) Pour tout $j \in Y\left(\Omega\right)$,
$$\mathbb{P}\left(Y = j\right) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}\left(X = i \text{ et } Y = j\right).$$

Remarque B4 : La loi conjointe détermine les lois marginales (d'après la proposition précédente, on peut déduire les secondes de la première). La réciproque est fausse (il y a plus d'information contenue dans la loi conjointe que dans les marginales). ♢

7. Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) : Mathématicien français.
8. Pafnouti Tchebychev (1821-1894) : Mathématicien russe.

Exemple B5 :
Donner trois exemples de couples de variables aléatoires de Bernoulli dont les lois conjointes sont différentes. Interpréter ces résultats en termes de lancer de pièces. ♢

Définition B6 *Loi conditionnelle*
Soit X, Y deux variables aléatoires. Soit $j \in Y(\Omega)$. La loi conditionnelle de X sachant $\{Y = j\}$ est la donnée des $\mathbb{P}(X = i | Y = j)$ pour tous $i \in X(\Omega)$.

Les définitions précédentes s'étendent naturellement aux familles de n variables aléatoires. Encore une fois, la connaissance des lois marginales d'une ou plusieurs variables aléatoires n'est pas suffisante pour connaître tous les liens entre toutes les variables.

2 Indépendance de variables aléatoires

Définition B7 *Variables aléatoires indépendantes*
Soit X, Y deux variables aléatoires. On dit que X et Y sont *indépendantes* si

$$\forall (i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j).$$

Proposition B8
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

(i) Pour tous $A \subseteq X(\Omega), B \subseteq Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

(ii) Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Exemple B9 :
On lance deux dés à quatre faces. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second dé. On définit alors les nouvelles variables aléatoires

$$U = \min(X, Y), \quad V = \max(X, Y).$$

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer les lois marginales de U et V.
3. Déterminer la loi conditionnelle de V sachant $\{U = 2\}$.
4. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

♢

Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple avec un couple (i, j) bien choisi, typiquement tel que $\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = 0$ mais $\mathbb{P}(X = i) \neq 0$ et $\mathbb{P}(Y = j) \neq 0$.

Définition B10 *Indépendance mutuelle et deux à deux*
Soit $n \geq 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. On dit qu'elles sont *indépendantes deux à deux* si

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \quad X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes.}$$

On dit qu'elles sont *mutuellement indépendantes* si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

En pratique, si on parle juste de variables aléatoires *indépendantes*, cela doit sous-entendre *mutuellement indépendantes.*

⚠ L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fausse. C'est ce qu'on a vu en première année dans le cas d'une famille d'évènements.

Exemple B11 :
On lance un dé bleu et un dé rouge de manière indépendante. On note X le résultat du dé bleu, Y le résultat du dé rouge, et on définit la variable aléatoire Z par

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } X + Y \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les variables aléatoires X, Y et Z sont deux à deux indépendantes.
2. Montrer que les variables aléatoires X, Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes.

♢

Proposition B12

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes.

(i) Pour tous $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \cdots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

(ii) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R})$. Alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Proposition B13

Soit $p \in]0, 1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

Autrement dit, on peut toujours interpréter une loi binomiale comme une somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli.

3 Covariance et corrélation

Définition/Proposition B14 *Covariance*

Soit X, Y deux variables aléatoires. On appelle *covariance de X et Y* le nombre

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

En particulier, on a

$$\mathbb{V}(X) = \operatorname{Cov}(X, X).$$

On rappelle que $\mathbb{E}(XY) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} ij\mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j)$.

Proposition B15

Soit X, Y deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y).$$

En particulier, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\operatorname{Cov}(X, Y) + b^2\mathbb{V}(Y).$$

Exemple B16 :
Avec les notations de l'exemple B9, déterminer la covariance de U et V. ♢

Proposition B17

Soit X et Y deux variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes, alors :

(i) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
(ii) $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

En particulier, si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Il vaut mieux revenir à la formule de $\mathbb{V}(X+Y)$ avec la covariance pour remontrer cette égalité à chaque fois, plutôt que de l'utiliser par erreur dans le cas de variables aléatoires non-indépendantes.

Définition B18 *Coefficient de corrélation linéaire*

Soit X, Y deux variables aléatoires. On suppose que X et Y ne suivent pas une loi certaine (et donc $\mathbb{V}(X) > 0$ et $\mathbb{V}(Y) > 0$). On appelle *coefficient de corrélation linéaire de X et Y* le nombre

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}}.$$

Proposition B19 *Valeurs remarquables du coefficient de corrélation linéaire*

Soit X, Y deux variables aléatoires.

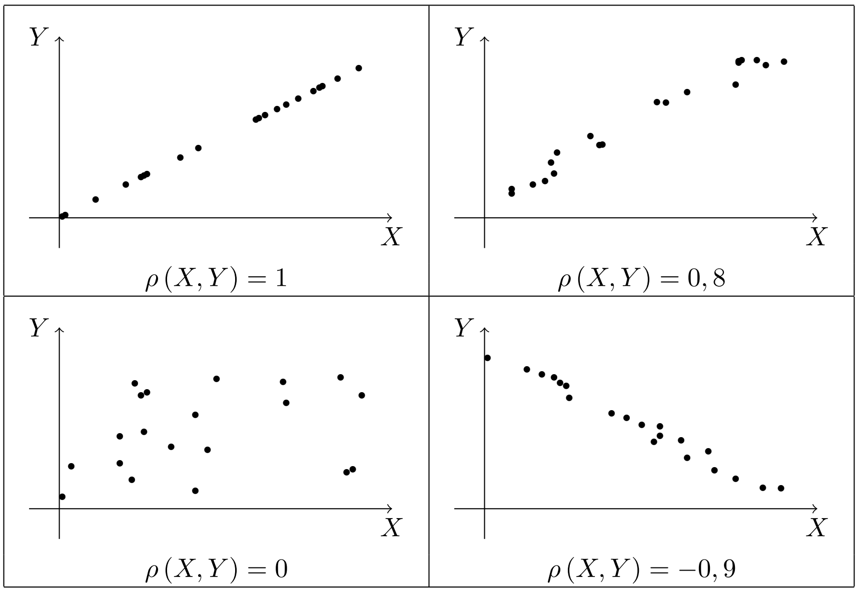
(i) On a $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$.
(ii) Si X et Y sont indépendantes alors $\rho(X, Y) = 0$.
(iii) On a l'équivalence :

$$\rho(X, Y) = \pm 1 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad Y = aX + b.$$

Dans le cas où $\rho(X,Y)=1$ (resp. $\rho(X,Y)=-1$), on parle de corrélation linéaire positive (resp. négative) entre les variables aléatoires X et Y. Cela signifie qu'on a $a>0$ (resp. $a<0$) dans la formule $Y=aX+b$.

Remarque B20 : Le coefficient de corrélation linéaire représente la façon dont les variables aléatoires X et Y sont linéairement corrélées, c'est-à-dire à quel point il est pertinent de modéliser Y comme une fonction affine de X.

- Si $|\rho(X,Y)|\simeq 1$, alors il est assez cohérent de supposer que $Y=aX+b$. Pour trouver a et b, on utilisera généralement une méthode statistique, dite de régression linéaire.
- Si $|\rho(X,Y)|\simeq 0$, il n'y a pas de lien affine entre X et Y. Cela peut vouloir dire que X et Y sont indépendantes, ou qu'il existe une autre relation entre les variables aléatoires.



$\diamondsuit$

Exemple B21 :
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme $\mathscr{U}(\llbracket -2,2\rrbracket)$. On définit $Y=X^2$.

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer $\rho(X,Y)$.

$\diamondsuit$

C Exercices

Exercice 4.1
Est-il plus probable d'obtenir un six en lançant quatre fois un dé, ou d'obtenir un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ?

Exercice 4.2
Un boîte contient 100 dés dont 25 sont truqués, donnant 6 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On choisit un dé au hasard, on le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi un dé truqué ?

Exercice 4.3

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On considère un dé truqué à six faces dont la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au chiffre sur cette face. On note X la variable aléatoire correspondant au résultat obtenu après un lancer.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer l'espérance de $\frac{1}{X}$.

Exercice 4.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On définit une nouvelle variable aléatoire $Y = n - X$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi marginale de Y.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = 1\}$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.5

Une armoire contient trois tiroirs. On range aléatoirement trois pantalons dedans. On note X le nombre de pantalons dans le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi du couple (X,N).
2. Déterminer les lois marginales de X et N.
3. Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires X et N.
4. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À un péage autoroutier, n voitures arrivent par jour et choisissent (de manière indépendante) une des trois barrières de péage à leur disposition. On note X_1, X_2 et X_3 le nombre de voitures ayant franchi chacune de ces barrières.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer les variances de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

1. On note p_n la probabilité de tirer à chaque fois une boule blanche et une boule rouge. Montrer que

$$p_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

2. (a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer par récurrence qu'à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall n \geq N, \quad p_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-N} p_N.$$

   (c) Conclure quant à la convergence de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 4.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} a_{i,j}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$.

Exercice 4.9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires finies. On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et que le couple aléatoire (X,Y) suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]^2$, c'est-à-dire qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a.$$

1. Montrer que $a = \dfrac{1}{n^2}$.
2. (a) Déterminer les lois marginales de X et Y.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $X+Y$, son espérance et sa variance.

Exercice 4.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires finies. On suppose que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = aij.$$

1. Montrer que $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Déterminer les lois et espérances de X et Y.
3. Calculer $\operatorname{Cov}(X,Y)$.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire $M = \max(X,Y)$.

Exercice 4.11

Soit $n \geq 2$. On considère un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n, et on procède à deux tirages successifs sans remise. On note X le numéro inscrit sur le premier jeton tiré et Y le numéro inscrit sur le second.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y) et les lois marginales de X et Y.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Exercice 4.12

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1,5]\!]$ et

$$\forall k \in [\![1,5]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k}{15}.$$

On définit une nouvelle variable aléatoire $M = \max(X,Y)$.

1. Déterminer $M(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ et $\mathbb{P}(Y \leq k)$. En déduire que
$$\mathbb{P}(M \leq k) = \frac{k^2(k+1)^2}{900}.$$
3. Justifier que, pour tout $k \in M(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k-1).$$

4. Déduire des questions précédentes la loi de M.

Exercice 4.13

On veut estimer la proportion p de gauchers sur terre. On choisit donc un échantillon de n personnes, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et on note

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si l'individu } i \text{ est gaucher,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On suppose que $p \in]0,1[$ et que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.

1. Commenter l'hypothèse faite sur la famille de variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire S_n ?
3. (a) Déterminer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
   (c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
   (d) Quelle valeur de n doit-on choisir pour que $\frac{S_n}{n}$ soit une approximation de p à $0,05$ près avec une probabilité supérieure à 95% ?

Exercice 4.14

On considère deux entiers naturels non-nuls m et n et $p \in]0,1[$.

1. On rappelle que, par convention, $\binom{b}{a} = 0$ si $a < 0$ ou $a > b$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n+m]\!]$,
$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$. On définit une nouvelle variable aléatoire $Z = X + Y$.

2. Pour tous $i \in [\![0, n]\!]$ et $j \in [\![0, n]\!]$, donner l'expression de $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$.
3. Déterminer $Z(\Omega)$.
4. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, déterminer l'expression de $\mathbb{P}(Z = k)$.
   Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales.
5. En déduire que Z suit une loi usuelle qu'on déterminera, et interpréter ce résultat.

CHAPITRE V

DÉTERMINANT

> *M. Vandermonde passe pour être un homme de talent, quoiqu'il n'en a pas la mine. Sa manière de s'exprimer n'est pas trop claire. Il est petit et son front ne passerait jamais pour le front d'un mathématicien.*
>
> Anders Johan Lexell

Pré-requis :

- Espaces vectoriels de dimension finie
- Matrices
- Compléments d'algèbre linéaire

	☹	😐	☺
Connaître et savoir utiliser les propriétés du déterminant			
Calculer un déterminant en dimension 4 ou 5			
Calculer un déterminant en dimension n			
Montrer qu'une matrice est inversible			
Montrer qu'une famille est une base			
Montrer qu'un endomorphisme est bijectif			

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

A Déterminant matriciel

1 Définition et premières propriétés

Définition/Théorème A1 *Déterminant matriciel*

On appelle *déterminant* l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que :

(i) Le déterminant de I_n vaut 1.

(ii) *n-linéarité* : le déterminant est linéaire en chacune des colonnes.
(iii) *Antisymétrie* : l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1.
(iv) *Alternance* : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.
(v) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Si $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

⚠ On ne définit le déterminant <u>que</u> pour les matrices carrées. Calculer le déterminant d'une matrice rectangulaire n'a aucun sens.

⚠ det <u>**n'est pas linéaire**</u> : on n'a pas $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

Le déterminant matriciel généralise les notions abordées en première année de déterminant (de deux vecteurs dans le plan) et de produit mixte (de trois vecteurs dans l'espace).

<u>**Proposition A2**</u> *Déterminants en petite dimension*

(i) Soit $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = a$.
(ii) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

(iii) *Règle de Sarrus*[1] : soit $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}.$$

Globalement, en dimension 2 et 3, on fait la somme des diagonales descendantes ($\searrow$) moins la somme des diagonales montantes ($\nearrow$).

⚠ Attention, cette "méthode" <u>**n'est plus valable**</u> en dimension $n \geq 4$.

<u>**Théorème A3**</u> *Déterminant du produit*

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

1. Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) : Mathématicien français.

Corollaire A4 *Déterminant et puissance*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = (\det A)^p$.

Théorème A5 *Déterminant et inverse*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0.$$

Dans ce cas, on a alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

En petite dimension, on utilisera désormais toujours le déterminant pour déterminer si une matrice est inversible ou pas (pour déterminer si une famille est une base, si un endomorphisme est bijectif, etc.).

Exemple A6 :
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer à quelles conditions sur a et b la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible. ♢

Exemple A7 :
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que, si A et B sont semblables, alors $\det A = \det B$.

♢

Théorème A8 *Déterminant et transposée*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A^\intercal) = \det A$.

Remarque A9 : D'après ce dernier théorème, toutes les propriétés relatives au déterminant matriciel concernant les colonnes restent vraies pour les lignes. Par exemple, le déterminant est multilinéaire, alterné et antisymétrique pour les lignes de la matrice, etc. ♢

Exemple A10 :
Soit n un entier impair et $A \in A_n(\mathbb{K})$. Calculer le déterminant de A. ♢

2 Opérations élémentaires et développement lignes/colonnes

Proposition A11 *Déterminant et opérations élémentaires*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $i \neq j \in [\![1, n]\!]$. On note A' la matrice obtenue par une opération élémentaire (sur les colonnes ou sur les lignes) suivante :

(i) $A \overset{C_i \leftrightarrow C_j}{\longrightarrow} A'$ ou $A \overset{L_i \leftrightarrow L_j}{\longrightarrow} A'$. Alors $\det A' = -\det A$.
(ii) $A \overset{C_i \leftarrow \lambda C_i}{\longrightarrow} A'$ ou $A \overset{L_i \leftarrow \lambda L_i}{\longrightarrow} A'$. Alors $\det A' = \lambda \det A$.
(iii) $A \overset{C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}{\longrightarrow} A'$ ou $A \overset{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}{\longrightarrow} A'$. Alors $\det A' = \det A$.

⚠ Ajouter à une colonne (ou à une ligne) une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant de la matrice.

Définition A12 *Cofacteur*

Supposons que $n \geq 2$. Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On définit le nombre

$$\Delta_{i,j}(A) = \det\left(\widetilde{A}_{i,j}\right), \quad \text{avec } \widetilde{A}_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,d} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,j-1} & a_{d,j+1} & \cdots & a_{d,d} \end{bmatrix}.$$

$\widetilde{A}_{i,j}$ est ici la matrice carrée de taille $d-1$ à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j. Pour retenir le signe devant $\Delta_{i,j}(A)$, il suffit de retenir le schéma suivant :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Théorème A13 *Développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On peut développer par rapport à la j-ème colonne :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

(ii) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On peut développer par rapport à la i-ème ligne :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

Corollaire A14

Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est **triangulaire** ou **diagonale**, alors

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

On en déduit qu'une méthode pour calculer un déterminant consiste à transformer la matrice associée en matrice triangulaire supérieure par opérations élémentaires (méthode du pivot de Gauss) puis de faire le produit des termes diagonaux.

Exemple A15 :
En développant par rapport à la seconde colonne puis en utilisant les formules de Sarrus, on a

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2(2+4-3) - (2+4-3) = -9.$$

♢

Exemple A16 :
Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. ♢

3 Déterminant de Vandermonde

Définition A17 *Matrice et déterminant de Vandermonde*[2]
Soit $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{K}^d$. On appelle *matrice de Vandermonde associée à* $(a_1, \ldots, a_d)$ la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \left[a_j^{i-1}\right]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

On appelle *déterminant de Vandermonde associé à* $(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant de cette matrice.

On trouve aussi comme définition la matrice transposée. Cela ne change rien au calcul de son déterminant ni à la condition d'inversibilité ci-dessous.

Proposition A18
Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. La matrice de Vandermonde associée à $(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si, et seulement si, les a_i sont distincts. De plus,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Exemple A19 :
Soit $r_0, r_1, r_2, \ldots$ des réels distincts. À l'aide de matrices de Vandermonde, démontrer que la famille $(x \mapsto e^{r_i x})_{i \in \mathbb{N}}$ est libre. ♢

B Déterminant dans les espaces vectoriels

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Déterminant d'une famille

2. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) : Mathématicien et chimiste français.

Définition B1 *Déterminant d'une famille dans une base*
Soit B une base de E et $x_1, \dots, x_n \in E$. On appelle *déterminant de la famille* $(x_1, \dots, x_n)$ *dans la base* B le nombre

$$\det_B (x_1, \dots, x_n) = \det (\mathrm{mat}_B (x_1, \dots, x_n)).$$

On a déjà vu le déterminant de trois vecteurs u, v, w en dimension trois : il est aussi appelé *produit mixte*, et noté $[u, v, w]$.

⚠ Par définition, cela n'a aucun sens de regarder le déterminant d'une famille qui ne possède pas n vecteurs (où $n = \dim E$).

⚠ Le déterminant d'une famille dépend de la base dans laquelle on exprime ses coordonnées !

Proposition B2 *Propriétés du déterminant dans une base*
Soit B une base de E, et soit $x_1, \dots, x_n \in E$. Alors on a :

(i) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det_B (x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda \det_B (x_1, \dots, x_n).$$

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det_B (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n \det_B (x_1, \dots, x_n).$$

(iii) Pour tous $i \neq j \in [\![1, n]\!]$,

$$\det_B (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_d) = - \det_B (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j \dots, x_n).$$

(iv) S'il existe $i \neq j \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_i = x_j$, alors

$$\det_B (x_1, \dots, x_n) = 0.$$

(v) On a $\det_B (B) = 1$.

On notera donc que deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul. De même, trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont coplanaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Exemple B3 :
Soit B, B' deux bases de E et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de E. Déterminer le déterminant dans la base B' de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de son déterminant dans la base B'. ♢

Théorème B4 *Caractérisation des bases*
Soit B une base de E et $x_1, \dots, x_n \in E$. Alors

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est une base de } E \iff \det_B (x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Exemple B5 :
Montrer que la famille $B = ((1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 1, 2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer le déterminant de la base canonique B_{can} dans la base B. ♢

Proposition B6 *Interprétation géométrique du déterminant*

(i) Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vaut $\det_{\text{can}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

(ii) Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vaut $\det_{\text{can}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

⚠ On parle ici d'aire (ou de volume) algébrique, car il peut être positif ou négatif.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition/Proposition B7 *Déterminant d'un endomorphisme*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E. On appelle *déterminant de* f le nombre

$$\det(f) = \det(\text{mat}_B(f)).$$

Ce nombre est indépendant de la base B considérée.

Le déterminant d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Théorème B8

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f).$$

Exemple B9 :

1. Soit φ un projecteur de E. Que peut-on dire de $\det \varphi$.
2. Même question si φ est une symétrie.

$\diamondsuit$

Théorème B10 *Caractérisation des automorphismes*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ Alors on a équivalence entre :

(i) f est bijective.

(ii) $\det(f) \neq 0$.

De plus dans ce cas, on a

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$

⚠ Si cette méthode est la plus rapide pour déterminer si une application linéaire est une bijection, elle ne permet pas de calculer f^{-1}.

Exemple B11 :

Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \to & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-z, y, 2x) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$.

$\diamondsuit$

C Exercices

Exercice 5.1

Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.2

Soit $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On définit $A = \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & z & -y & x \end{bmatrix}$.

1. Calculer AA^{T}.
2. En déduire la valeur de $\det A$.

Exercice 5.3

Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5.4

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$.

1. La famille $B' = (e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_2 + e_3)$ est-elle libre ?
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer à quelle condition la famille B'' $(e_1 + \lambda e_2, e_2 + \lambda e_3, e_3 + \lambda e_1)$ est une base de E.

Exercice 5.5

Calculer le déterminant $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 5.6

La famille $B\left(1 + 2X - X^2 + X^3, X - X^2 + 2X^3, 1 - 3X + X^2 + 2X^3, 1 + 2X + X^2 + X^3\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3[X]$?

Exercice 5.7

Soit $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$. On définit $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g-a & h-b & i-c \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}$$

Déterminer $\det B$ en fonction de $\det A$.

Exercice 5.8

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.9

Soit $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère deux solutions $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle

$$y''(t) = a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t).$$

On appelle *wronskien* la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}.$$

Montrer que w est solution d'une équation linéaire et en déduire son expression.

Exercice 5.10

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de taille n défini par

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & a & a+b \end{vmatrix}.$$

Exercice 5.11

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a, b, c et d pour que la matrice $M = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ soit inversible.

Exercice 5.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On définit $f : x \mapsto \det(A + xB)$, avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$A = \begin{bmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (c) & & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} & & \\ & (1) & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Déterminer une expression simple pour f.

Exercice 5.13

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}^3$. On définit $d = \begin{vmatrix} b+c & b^2+c^2 & b^3+c^3 \\ a+c & a^2+c^2 & a^3+c^3 \\ a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix}$. En se ramenant à un déterminant de Vandermonde, déterminer une expression factorisée de d.

Exercice 5.14

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer, après avoir justifié leur existence, les solutions du système $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ \cdots \\ x_{n-1} + \alpha x_n = 0 \\ x_n + \alpha x_1 = 0 \end{cases}$.

Exercice 5.15

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$. Calculer d_n, le déterminant de taille n défini par $d_n = \begin{vmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice 5.16

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer tous les nombres réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $\lambda I_3 - A$ n'est pas inversible. On les note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
2. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer une base de $\ker(\lambda_i \operatorname{Id} - f)$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale.

Deuxième partie

Chapitres fondamentaux

CHAPITRE VI

SÉRIES NUMÉRIQUES

> *Le plus lent ne sera jamais rattrapé à la course par le plus rapide ; car il est nécessaire que le poursuivant gagne d'abord le point d'où a pris son départ le poursuivi, en sorte qu'il est nécessaire que le plus lent, à chaque fois, ait quelque avance.*
>
> Aristote

Pré-requis :

- Suites numériques
- Intégrales généralisées

	☹	😐	☺
Connaître et mettre en œuvre le plan d'étude d'une série numérique			
Savoir appliquer les théorèmes de comparaison et d'équivalence des séries à termes positifs			
Savoir revenir à la définition pour étudier la nature ou la valeur d'une série			
Maîtriser le critère de D'Alembert et la comparaison série/intégrale			
Étudier la convergence absolue d'une série			

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A Généralités sur les séries

1 Définition

Définition A1 *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle *série de terme général* u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_n u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le *terme général* de la série $\sum_n u_n$ et le nombre S_N est la *somme partielle d'indice N* de la série $\sum_n u_n$.

Remarque A2 :

- La série $\sum_n u_n$ est la suite des sommes partielles.
- Une série est donc, par définition, une suite (c'est juste une suite un peu particulière, qu'on étudiera avec des outils un peu particuliers).
- Comme pour les suites, on pourra bien évidemment définir une série à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
- Attention à ne pas confondre la série $\sum_n u_n$, la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$ et la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (lorsqu'elle existe).

♢

Exemple A3 :
La série $\sum_n n^2$ est une série définie à partir du rang $n = 0$, de terme général $u_n = n^2$, dont la somme partielle vaut :

$$\forall N \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N\,(N+1)\,(2N+1)}{6}.$$

♢

Dans la suite, sauf mention contraire, $(u_n) \in \mathbb{K}^n$ est une suite et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_n u_n$ la série de terme général u_n. On note S_N sa somme partielle d'indice N.

⚠ Si la suite commence au rang 0 alors la somme partielle S_N possède $N+1$ termes.

2 Séries de référence

Définition/Proposition A4 *Série géométrique*

Une série est dite *géométrique* si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_n q^n, \quad q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}.$$

Dans ce cas,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Définition/Proposition A5 *Série télescopique*
Une série est dite *télescopique* si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_n (a_{n+1} - a_n)\,, \quad (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

Dans ce cas,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} (a_{n+1} - a_n) = a_{N+1} - a_0.$$

Définition A6 *Série exponentielle*
Une série est dite *exponentielle* si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_n \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{K}.$$

Définition A7 *Séries de Riemann*[1]
Une série est dite *de Riemann* si elle s'écrit sous la forme

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Enfin, quelques cas particuliers :

- La *série harmonique* est la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ (c'est la série de Riemann correspondant à $\alpha = 1$).
- La *série harmonique alternée* est la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$, parfois aussi $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Remarque A8 (*Pourquoi "série harmonique" ?*) : En acoustique, un *partiel harmonique* est une composante d'un son périodique, dont la fréquence est un multiple entier d'une fréquence fondamentale. Par exemple, prenons le La classique (440 Hz) : le La de l'octave du dessus sera à 880 Hz et celui du dessous à 220 Hz. La note de tierce majeure est Do♯, à 550 Hz, et la note qui complète l'accord en quinte est Mi, à 660 Hz.

Les harmoniques naturels d'une note sont donnés par les fréquences multiples de la fondamentale. Ces notes harmoniques sont donc des vibrations dont les longueurs d'onde sont des inverses d'entiers (à constante près). ◇

3 Notion de convergence

Définition A9 *Somme d'une série*
Soit $\displaystyle\sum_n u_n$ une série à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge si la suite des sommes partielles

1. Berhard Riemann (1826-1866) : Mathématicien allemand.

$\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$. On appelle alors *somme de la série* le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Sinon, on dit que la série $\sum_n u_n$ *diverge.*

Exemple A10 :
En reprenant l'exemple A3, $\sum_n n^2$ diverge car $\lim_{N\to+\infty} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = +\infty$. ♢

Exemple A11 :
Étudier la nature des séries $\sum_n \frac{3}{2^n}$, $\sum_n n$ et $\sum_n \frac{1}{n^2+n}$, et déterminer leur somme en cas de convergence. ♢

Proposition A12

Soit $\sum_n u_n$ une série. Soit $n_0 \leq n_1 \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geq n_1} u_n \text{ converge}$$

Si ces séries convergent, alors on a

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

⚠ La nature de $\sum_n u_n$ ne dépend pas de ses premiers termes, mais bien du comportement asymptotique de u_n.

Proposition A13 *Propriétés des séries convergentes*

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent, alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\sum_n (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ et $\sum_n u_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$.

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(iv) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff \begin{cases} \sum_n \mathfrak{Re}(u_n) \text{ converge} \\ \sum_n \mathfrak{Im}(u_n) \text{ converge} \end{cases} \iff \sum_n \overline{u}_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re\mathrm{e}\,(u_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \Im\mathrm{m}\,(u_n)\,, \quad \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u}_n.$$

On notera que, si $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ diverge, alors $\sum_n (u_n + v_n)$ diverge (évident par l'absurde).

Proposition A14 *Convergence d'une série géométrique*

Soit $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$. La série géométrique $\sum_n q^n$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Définition/Proposition A15 *Convergence d'une série géométrique dérivée – Admis*

Soit $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$. La *série géométrique dérivée* $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

La *série géométrique dérivée d'ordre 2* $\sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\,q^{n-2}$ est convergente si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Définition/Proposition A16 *Convergence d'une série géométrique intégrée – Admis*

Soit $q \in \mathbb{R}$. La *série géométrique intégrée* $\sum_{n\geq 1} \frac{q^n}{n}$ est convergente si, et seulement si, $q \in [-1, 1[$. Dans ce cas, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = -\ln(1-q)\,.$$

Proposition A17 *Convergence d'une série télescopique*

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série télescopique $\sum_n (a_{n+1} - a_n)$ est convergente si, et seulement si, la suite (a_n) est convergente. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) - a_0.$$

⚠ Remarquons qu'étudier la nature d'une série télescopique revient à étudier la nature d'une suite (et inversement). Les séries télescopiques sont le moyen principal d'utiliser des outils de séries dans le cadre des suites.[2]

Proposition A18 *Convergence d'une série exponentielle*

Soit $x \in \mathbb{K}$. La série exponentielle $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Définition A19 *Reste*

Soit $\sum_n u_n$ une série convergente. Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit son *reste d'indice N* :

$$R_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

⚠ On parle de reste uniquement dans le cas d'une série convergente, sinon cela n'a strictement aucun sens. Dans ce cas, les deux sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ sont bien définies.

Proposition A20

Soit $\sum_n u_n$ une série convergente. Alors la suite des restes de la série $\sum_n u_n$ converge vers 0.

Exemple A21 :

Le reste de rang N de la série géométrique $\sum_n q^n$ est $\frac{q^{N+1}}{1-q}$. ♢

Proposition A22

Soit $\sum_n u_n$ une série. Alors

$$\sum_n u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

⚠ La réciproque est fausse !

Définition/Proposition A23 *Divergence grossière*

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^n$. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_n u_n$ diverge. On dit que $\sum_n u_n$ *diverge grossièrement.*

2. La réciproque est vraie aussi, mais moins utilisée en pratique.

⚠ Il n'y a pas de notion de divergence grossière pour les intégrales généralisées !

Exemple A24 :

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

♢

B Séries à termes positifs

Dans toute cette partie, on travaille avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

1 Somme d'une série à termes positifs

Lemme B1

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs. Alors

$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff \exists M>0, \quad \forall N\in\mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} u_n \leq M.$$

Une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite des ses sommes partielles est majorée. Attention, cela ne veut pas dire que la somme de la série est M.

Théorème B2 *Comparaison des séries à termes positifs*

Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq v_n$. Alors

(i) Si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge et

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum_n u_n$ diverge alors $\sum_n v_n$ diverge.

Théorème B3 *Équivalence des séries à termes positifs*

Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors

$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff \sum_n v_n \text{ converge.}$$

⚠ Ces théorèmes ne sont pas vrais en général pour les séries qui ne sont pas à termes de signe constant.

Comme pour les intégrales généralisées, ce théorème se généralise facilement :

- aux séries à termes positifs à partir d'un certain rang ;
- aux séries à termes négatifs (éventuellement à partir d'un certain rang).

Exemple B4 :
Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_n \frac{1+\sin(3n)}{2^n}, \quad \sum_n \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right) e^n}{n!}.$$

◇

2 Comparaison série/intégrale

Théorème B5 *Comparaison série/intégrale*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors

$$\int_{n_0}^{+\infty} f \text{ converge} \iff \sum_n f(n) \text{ converge.}$$

Ce théorème est très utile. Mais surtout, il faut savoir appliquer la méthode. Le point important est de considérer une fonction <u>monotone</u> ! Par contre, la comparaison série/intégrale ne permet pas de calculer la somme $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$.

Exemple B6 :
Déterminer un équivalent de $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $N \to +\infty$.

Indication : on pourra considérer l'intégrale $\int_1^N \frac{dt}{\sqrt{t}}$. ◇

Théorème B7 *Critère de Riemann*[3]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Exemple B8 :
Montrer que $\sum_n e^{-n}$ est une série convergente de trois manière différentes. ◇

3. Bernhard Riemann (1826-1866) : Mathématicien allemand.

3 Critère de D'Alembert

Théorème B9 *Critère de D'Alembert*[4]

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

(i) Si $\ell < 1$ alors $\sum_n u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$ alors $\sum_n u_n$ diverge (grossièrement).

⚠ Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \sum_n \frac{1}{n} \text{ diverge}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1, \quad \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Exemple B10 :
Déterminer la nature de $\sum_n \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

◊

Exemple B11 :
Soit $a > 0$. Étudier la convergence de la série $\sum_n \binom{n}{3} a^n$.

◊

C Séries en pratique

1 Absolue convergence

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition C1 *Convergence absolue et semi-convergence*

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels ou complexes. On dit que $\sum_n u_n$ *converge absolument* si $\sum_n |u_n|$ converge.
Si la série $\sum_n u_n$ converge mais ne converge pas absolument, on dit que $\sum_n u_n$ est dite*semi-convergente.*

Théorème C2

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels ou complexes. Si $\sum_n u_n$ converge absolument alors $\sum_n u_n$ converge.

4. Jean-Baptiste le Rond D'Alembert (1717-1783) : Philosophe et mathématicien français.

Théorème C3 *Inégalité triangulaire*

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes réels ou complexes absolument convergente. Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Exemple C4 :

Étudier la nature des séries $\sum_n e^{-n+in^2}$ et $\sum_n \left(i + \frac{(-1)^n \ln n}{n^{3/2}}\right)$ ♢

2 Plan d'étude

Question : étudier la nature de la série $\sum_n u_n$.

Réponse :

1. On vérifie d'abord que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, sinon la série diverge grossièrement.
2. On essaie de réécrire la série pour faire apparaître des séries de référence (géométrique, exponentielle, télescopique, Riemann).
3. Sinon, si la série est à termes de signe constant, on essaie de la comparer (équivalent, majoration, minoration) avec une série plus simple (comparaison ou équivalence des séries à termes positifs).
4. Sinon, si $u_n > 0$, on essaie de déterminer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (critère de D'Alembert).
5. Sinon, si $u_n = f(n)$ et que f est continue et monotone, on essaie d'étudier la nature de $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ (comparaison série/intégrale).
6. Sinon, on considère $\sum |u_n|$ et on essaie de montrer que $\sum |u_n|$ converge (convergence absolue).
7. Sinon…

3 Développement décimal

Définition/Théorème C5 *Développement décimal*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *développement décimal de x* l'unique suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

(i) $a_0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n \in [\![0, 9]\!]$.
(ii) La suite (a_n) n'est pas stationnaire en 9.
(iii) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$.

Sans la condition (ii), le développement n'est pas unique. En effet, notons $x = 0,9999\ldots$. Alors

$$10x = 9,9999\cdots = x + 9, \quad x = 1.$$

donc $1 = 0,9999\ldots$

Remarque C6 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq a_n 10^{-n} \leq 9 \times 10^{-n},$$

et $\sum_n \left(9 \times 10^{-n}\right)$ est une série géométrique de raison 10^{-1} donc convergente. La série $\sum_n a_n 10^{-n}$ est donc convergente, par comparaison de séries à termes positifs. $\diamondsuit$

Théorème C7

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors x est rationnel si, et seulement si, son développement décimal est périodique.

Exemple C8 :
Posons $x = 1,28703703703703\ldots$. Montrer que $x \in \mathbb{Q}$, puis donner la valeur de x sous forme de fraction irréductible. $\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 6.1

Étudier la nature des séries suivantes, et déterminer leur somme en cas de convergence.

$$\sum_{n\geq 1} \left(\ln n - \ln(n+1)\right), \quad \sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \sum_n \frac{4}{e^n}, \quad \sum_n \frac{1}{n!}.$$

Exercice 6.2

Étudier la nature des séries suivantes.

$$\sum_n \frac{(-1)^n + \sin n}{2^n}, \quad \sum_n n e^{-n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^2 2^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right), \quad \sum_{n\geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right).$$

Exercice 6.3

Étudier la nature des séries suivantes.

$$\sum_{n\geq 1} \ln(\operatorname{sh} n), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n}, \quad \sum_n \frac{\sin(2^n)}{n!}, \quad \sum_n \frac{1+(n-1)!}{n!}.$$

Exercice 6.4

Étudier la nature des séries suivantes, et déterminer leur somme en cas de convergence.

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln(n+2)\ln n}\right), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+\cdots+n}, \quad \sum_n n e^{-3n}.$$

Exercice 6.5

Étudier la nature des séries suivantes, et déterminer leur somme en cas de convergence.

$$\sum_n \frac{2n^2 - n + 1}{n!}, \quad \sum_n \frac{1+\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}, \quad \sum_n \frac{n^2}{2^n}.$$

Exercice 6.6

Étudier la nature des séries suivantes.

$$\sum_{n\geq 1} \ln(\operatorname{th} n), \quad \sum_n \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}, \quad \sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 6.7

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme partielle de la série harmonique $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

1. (a) Montrer que $\ln(N+1) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln N$.
   (b) Montrer que $S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln N$.
   Indication : on pourra faire une comparaison série/intégrale.
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $a_N = S_N - \ln(N)$.
   (a) Déterminer un équivalent simple de $a_{N+1} - a_N$ lorsque $N \to +\infty$.
   (b) En déduire que la suite $(a_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une certaine limite qu'on notera γ. On ne demande pas de calculer γ.
3. Déduire des questions précédentes un développement asymptotique à deux termes de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6.8

Le but de l'exercice étant de redémontrer la convergence de la série exponentielle, on ne pourra donc pas utiliser les résultats du cours la concernant. On fixe dans tout l'exercice $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $x = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.
2. Dans la suite de la question 1, on suppose que $x \neq 0$. Justifier que la série $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que
$$|e^x - S_N(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$
4. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$ puis montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exercice 6.9

Le but de l'exercice étant de redémontrer la convergence de la série géométrique dérivée, on ne pourra donc pas utiliser les résultats du cours la concernant. On fixe dans tout l'exercice $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, la série $\sum_n n x^{n-1}$ diverge.
2. Dans la suite, on suppose que $x \in]-1, 1[$. Montrer qu'alors $\lim_{n\to+\infty} n x^n = 0$.
3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$. En étudiant la fonction S_N, Montrer que
$$\sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{N x^{N+1} - (N+1) x^N}{(1-x)^2}.$$
4. En déduire que la série $\sum_n n x^{n-1}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exercice 6.10

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum_n u_n$ est alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés.

On suppose dans la suite que $\sum_n u_n$ est une série alternée, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \geq |u_{n+1}|.$$

1. On démontre dans cette question que la série $\sum_n u_n$ converge. Ce résultat s'appelle *critère spécial des séries alternées.*
   (a) Expliquer pourquoi on peut supposer $u_0 \geq 0$, ce qu'on fera dans la suite.
   (b) En déduire le signe de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On définit, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$. Montrer que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.
   (d) Justifier que (S_{2N}) et (S_{2N+1}) convergent vers une même limite finie ℓ et en déduire que la série $\sum_n u_n$ est convergente.
2. Montrer que $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est une série semi-convergente.

Exercice 6.11

1. Soit $N \geq 2$. Montrer que, pour tout $n \in [\![0, N-2]\!]$, $\frac{n!}{N!} \leq \frac{1}{N(N-1)}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{N} n! \underset{N\to+\infty}{\sim} N!$.

Exercice 6.12

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Étudier les variations de la suite (u_n) et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n^2$, et la valeur de sa somme si elle converge.

Exercice 6.13

Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}.$$

1. Montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}.$$

2. Comparer $\lim_{N\to+\infty}\left(\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right)$ et $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right)$.

Exercice 6.14

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum_n \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

Exercice 6.15

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum_n \frac{n!}{n^{an}}$.

Exercice 6.16

Soit $x \in \mathbb{C}$. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Exercice 6.17

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln n + \alpha \ln(n+1) + \beta \ln(n+2).$$

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$
2. Déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence.

Exercice 6.18

Pour $\alpha > 0$, on note $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + n^2}$.

1. Montrer que $S(\alpha)$ est bien définie pour tout $\alpha > 0$.
2. Déterminer la limite de $S(\alpha)$ lorsque $\alpha \to +\infty$.
   Indication : on pourra encadrer $S(\alpha)$ avec des intégrales.

CHAPITRE VII

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES

❝ *My beard is better at math than you.* ❞

Bernhard Riemann

Pré-requis :

- Endomorphismes en dimension finie
- Représentation matricielle
- Déterminant

	☹	😐	☺
Connaître et savoir utiliser les définitions de valeur propre et de vecteur propre			
Calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice en petite dimension			
Déterminer une base des espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice			
Montrer qu'un endomorphisme ou qu'une matrice est trigonalisable			
Montrer qu'un endomorphisme ou qu'une matrice est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres (ou une décomposition $A = PDP^{-1}$)			
Déterminer la puissance k-ème d'une matrice diagonalisable			
Savoir passer d'un système récurrent à une suite récurrente matricielle et inversement, déterminer une expression explicite des suites concernées			

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

A Éléments propres

1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition A1 *Valeurs propres*

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une *valeur propre de f* s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$. L'ensemble des valeurs propres de f est appelé *spectre de f* et noté

$$\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} / \exists x \in E \setminus \{0\}, f(x) = \lambda x\}.$$

Définition A2 *Vecteurs propres*

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. On dit que x est un *vecteur propre de f* s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

On remarque que $x \in E$ est un vecteur propre de f si, et seulement si, $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

Définition A3 *Sous-espace propre*

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. On appelle *sous-espace propre de f associé à λ* l'ensemble

$$E_\lambda(f) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\} = \ker(\lambda \,\mathrm{Id}_E - f).$$

$E_\lambda(f)$ étant le noyau d'une application linéaire, il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel. C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ (et le vecteur nul).

Exemple A4 :
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que

$$f(e_1) = -e_1 + 3e_2 - 3e_3, \quad f(e_2) = -7e_1 + 9e_2 - 7e_3, \quad f(e_3) = -5e_1 + 5e_2 - 3e_3.$$

1. Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que le vecteur $(1, 1, -2)$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?
3. Déterminer la dimension du sous-espace propre de f associé à la valeur propre 2.

◇

Proposition A5

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Alors $E_\lambda(f)$ est stable par f et l'endomorphisme induit vérifie $f_{\| E_\lambda(f)} = \lambda \,\mathrm{Id}_{E_\lambda(f)}$.

Proposition A6

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathrm{Sp}(f)$ distincts. Alors la somme $E_{\lambda_1}(f) + \cdots + E_{\lambda_p}(f)$ est directe, c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f).$$

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si, et seulement si,

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p, \quad \left(\sum_{k=1}^{p} x_k = 0\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_p = 0 \end{cases}$$

Corollaire A7
L'endomorphisme f possède au plus n valeurs propres distinctes.

2 Polynôme caractéristique

Définition A8 *Polynôme caractéristique*
On appelle *polynôme caractéristique de* f le polynôme

$$\chi_f = \det\left(X \operatorname{Id}_E - f\right).$$

Autrement dit, $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda Id_E - f)$.

Proposition A9
Le polynôme caractéristique vérifie :

(i) $\deg(\chi_f) = n$.

(ii) En notant $\chi_f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$a_n = 1, \quad a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(f), \quad a_0 = (-1)^n \det(f).$$

Théorème A10
Les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique. Autrement dit,

$$\operatorname{Sp}(f) = Z(\chi_f).$$

Définition A11 *Multiplicité*
Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$. On appelle *multiplicité de* λ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme χ_f. On la note $m_\lambda(f)$.

Si $P = (X-r)^m Q$ avec $Q(r) \neq 0$, alors m est la multiplicité de r dans P. Autrement dit,

$$m = \max\left\{k \in \mathbb{N} / (X-r)^k \text{ divise } P\right\}.$$

De manière équivalente, r est racine de multiplicité m de P si, et seulement si,

$$P(r) = 0, \quad P'(r) = 0, \quad \ldots \quad P^{(m-1)}(r) = 0, \quad P^m(r) \neq 0.$$

Exemple A12 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

1. Déterminer les valeurs propres de f ainsi que leur multiplicité.
2. Déterminer les sous-espaces propres de f.

◇

Proposition A13

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Alors on a l'inégalité suivante :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f).$$

On retrouve le fait qu'un endomorphisme admet moins de n valeurs propres distinctes.

Exemple A14 :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F \oplus G = E$. On note p le projecteur sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de p et de s. ♢

3 Éléments propres d'une matrice

Définition A15 *Éléments propres d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une base B de E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{mat}_B(f)$.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre de* A s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de E.

(ii) On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ est un *vecteur propre de* A s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.

(iii) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On appelle *sous-espace propre de* A *associé à* λ l'ensemble

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\} = \ker(\lambda I_n - A).$$

(iv) On appelle *polynôme caractéristique de* A le polynôme

$$\chi_A = \det(XI_n - A).$$

Remarque A16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe une base B de E et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{mat}_B(f)$. On a la correspondance suivante :

(i) $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$.

(ii) x est un vecteur propre de f si, et seulement si, $X = \mathrm{mat}_B(x)$ est un vecteur propre de A.

(iii) $E_\lambda(A) = \{\mathrm{mat}_B(x) / x \in E_\lambda(f)\}$.

(iv) $\chi_A = \chi_f$.

C'est exactement la même correspondance que pour le noyau, le rang, l'image, la trace... ♢

Exemple A17 :
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) + XP' \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres de f.
3. Sans calcul, déterminer la dimension des sous-espaces propres de f.
4. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de f.
5. Montrer qu'il existe une base B' de $\mathbb{R}_2[X]$, que l'on déterminera, telle que $\mathrm{mat}_{B'}(f)$ soit diagonale.

♢

Pour déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f ou de sa matrice associée A, on déterminera leur polynôme caractéristique (puis ses racines) en calculant le déterminant matriciel $\det(XI_n - A)$. Pour déterminer le sous-espace propre associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, on résoudra ou le système linéaire $AX = \lambda X$. [1]

Proposition A18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses termes diagonaux.

Le résultat précédent est en particulier valable si A est diagonale.

Exemple A19 :

Déterminer le spectre de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ♢

B Diagonalisation et trigonalisation

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On définit les ensembles suivants :

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/ M \text{ est diagonale}\},$$
$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/ M \text{ est triangulaire supérieure}\}.$$

On note également $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. [2]

1 Diagonalisation

Définition B1 *Endomorphisme diagonalisable*

L'endomorphisme f est dit *diagonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est appelée *base de diagonalisation* de f.

On remarquera que f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Définition B2 *Matrice diagonalisable*

La matrice A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

C'est évidemment la même chose de dire qu'une matrice est diagonalisable ou qu'elle représente un endomorphisme diagonalisable.

Théorème B3 *Caractérisation de la diagonalisabilité*

Soit $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f. Alors on a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) f est diagonalisable.

1. Résoudre l'équation $f(x) = \lambda x$ est généralement plus compliqué si l'on ne travaille pas dans $\mathbb{R}^n$.
2. Ces notations ne sont pas standards et devront être redéfinies en dehors du cercle familial.

(ii) χ_f est scindé dans $\mathbb{K}$ et, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim\left(E_{\lambda_k}(f)\right) = m_{\lambda_k}(f)$.

📅 On rappelle qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé (dans $\mathbb{K}$) s'il possède autant de racines (comptées avec leur multiplicité) dans $\mathbb{K}$ que son degré ou, de manière équivalente, s'il s'écrit sous la forme

$$P = \lambda\,(X - r_1)^{m_1} \ldots (X - r_p)^{m_p}\,, \qquad \text{avec } r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{K}.$$

Par exemple, les polynômes $X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$ ne sont pas scindés dans $\mathbb{R}$ (leurs racines respectives sont $i, -i$ et $j, -j$).

📅 Tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$.

On remarquera que les propositions (i) et (ii) sont aussi équivalentes à :

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim\left(E_{\lambda_k}(f)\right) = n.$

(iv) $\displaystyle E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f).$

Ces deux critères sont beaucoup moins utilisés en pratique.

Exemple B4 :
Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ défini par

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, y+z, z)\,.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. ♢

⚠ La base de diagonalisation de f n'est pas unique.

Exemple B5 :
Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de diagonalisation de f. ♢

Corollaire B6

Si le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

⚠ Il ne s'agit pas d'une équivalence, contrairement au théorème donné précédemment.

Exemple B7 :
La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Si oui, déterminer la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. ♢

On a donc le tableau suivant :

Cas général	f diagonalisable
Espaces propres en somme directe	Espaces propres "supplémentaires"
$1 \leq \dim\left(E_\lambda(f)\right) \leq m_\lambda(f)$	$\dim\left(E_\lambda(f)\right) = m_\lambda(f)$

Proposition B8

Supposons que f soit diagonalisable. Alors le déterminant de f est le produit des valeurs propres de f, et la trace de f est la somme des valeurs propres de f (comptées avec leur multiplicité).

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f alors

(i) $\det(f) = \lambda_1^{m_{\lambda_1}(f)} \times \cdots \times \lambda_p^{m_{\lambda_p}(f)}$.
(ii) $\mathrm{Tr}(f) = m_{\lambda_1}(f)\,\lambda_1 + \cdots + m_{\lambda_p}(f)\,\lambda_p$.

Théorème B9 *Théorème spectral*

Soit A une matrice carrée symétrique réelle. Alors A est diagonalisable.

Exemple B10 :

Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable. ♢

2 Trigonalisation

Définition B11 *Endomorphisme trigonalisable*

L'endomorphisme f est dit *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une telle base est appelée *base de trigonalisation* de f.

Définition B12 *Matrice trigonalisable*

La matrice A est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

C'est encore une fois la même chose de dire qu'une matrice est trigonalisable ou qu'elle représente un endomorphisme trigonalisable. En particulier, diagonalisable implique trigonalisable.

Théorème B13 *Caractérisation de la trigonalisabilité*

On a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) f est trigonalisable.
(ii) χ_f est scindé dans $\mathbb{K}$.

Corollaire B14

(i) Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.
(ii) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition B15

Supposons que f soit trigonalisable. Alors le déterminant de f est le produit des valeurs propres de f, et la trace de f est la somme des valeurs propres de f (comptées avec leur multiplicité).

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de f alors

(i) $\det(f) = \lambda_1^{m_{\lambda_1}(f)} \times \cdots \times \lambda_p^{m_{\lambda_p}(f)}$.
(ii) $\mathrm{Tr}(f) = m_{\lambda_1}(f)\,\lambda_1 + \cdots + m_{\lambda_p}(f)\,\lambda_p$.

C'est exactement la proposition B8, qui reste vraie dans le cadre plus général des endomorphismes trigonalisables.

Exemple B16 :

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que l'endomorphisme f est trigonalisable. Est-il diagonalisable ?
2. Déterminer une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base B soit triangulaire supérieure.

$\diamondsuit$

Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme, ce qui n'empêche pas les exercices d'être posés régulièrement. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes d'un endomorphisme f. Supposons qu'on ait déjà démontré que f est trigonalisable.

- Niveau 1 : on peut obtenir une matrice de la forme

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * & * & * \\ & \ddots & * & * & * & * & * \\ & & \lambda_1 & * & * & * & * \\ & & & \ddots & * & * & * \\ & & & & \lambda_p & * & * \\ & (0) & & & & \ddots & * \\ & & & & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

  T n'est pas n'importe quelle matrice triangulaire : la diagonale est formée des valeurs propres de f. On peut choisir les valeurs propres
- Niveau 2 : on peut obtenir une matrice de la forme

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & (0) \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_p & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & (0) & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & \lambda_p \end{bmatrix}$$

  La matrice J est une matrice triangulaire supérieure bien particulière, dite de Jordan. [3] Il s'agit globalement de la matrice la plus simple qu'on puisse fabriquer à partir d'un endomorphisme trigonalisable. Elle est diagonale par blocs, où chaque bloc est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

3. Camille Jordan (1838-1922) : mathématicien français.

Exemple B17 :

Trigonaliser la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ sous forme de Jordan. ◊

Exemple B18 :

1. Montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est trigonalisable. Est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les espaces propres de A.
3. Montrer que A est semblable à la matrice $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. On pourra pour cela raisonner par analyse/synthèse en considérant un endomorphisme associé à A.

◊

C Applications de la réduction

1 Puissances d'une matrice

Proposition C1

Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(A')^k = P^{-1}A^kP.$$

Par convention, $A^0 = I_n$.

Proposition C2

Soit $D \in D_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont noté $d_1, \ldots, d_n$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & & & (0) \\ & d_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Exemple C3 :

Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. ◊

Pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable, on détermine $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D \in D_n(\mathbb{K})$ telles que $D = P^{-1}AP$, on trouve l'expression de P^{-1} puis on efectue le produit matriciel $A^k = PD^kP^{-1}$.

Pour calculer les puissances d'une matrice trigonalisable, il n'y a pas de méthode qui marche à tous les coups. On peut commencer par déterminer $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire telles que $T = P^{-1}AP$. Notons

$T = D + N$ où D est la diagonale de T. Alors, si D et N commutent, on calcule $T^k = (D+N)^k$ à l'aide du binôme de Newton :

1. Il est facile de déterminer toutes les puissances de D car elle est diagonale.
2. N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.
3. La somme obtenue par le binôme de Newton a donc au plus p termes, on peut la calculer explicitement.

2 Suites récurrentes matricielles

Proposition C4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit (U_n) une suite à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad U_{k+1} = AU_k.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = A^k U_0$.

Autrement dit, en "écriture système", si les suites $(u_k), (v_k), (w_k)$ sont définies par

$$u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{k+1} = a_{1,1}u_k + a_{1,2}v_k + a_{1,3}w_k \\ v_{k+1} = a_{2,1}u_k + a_{2,2}v_k + a_{2,3}w_k \\ w_{k+1} = a_{3,1}u_k + a_{3,2}v_k + a_{3,3}w_k \end{cases},$$

alors on peut déterminer l'expression de u_k, v_k, w_k directement en fonction de k en calculant A^k. On généralise simplement les suites géométriques en version matricielle.

Exemple C5 :
En Norvège, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain il pleut ou il neige avec même probabilité. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux que le temps change le lendemain, et si le temps change il y a une chance sur deux qu'il fasse beau. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note respectivement u_n et v_n la probabilité qu'il fasse beau temps et celle qu'il fasse mauvais temps (c'est-à-dire qu'il pleuve ou qu'il neige) le jour n

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}v_n, \\ v_{n+1} = u_n + \frac{3}{4}v_n. \end{cases}$$
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice A, que l'on déterminera, telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n.$$
   (b) Montrer que A est diagonalisable et déterminer des matrices $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
   (c) Déterminer P^{-1} et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose dans cette question qu'il fait beau le jour 0.
   (a) Calculer la probabilité qu'il fasse beau le jour n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.
4. Proposer une modélisation plus précise qui ferait la distinction entre la pluie et la neige. Que deviennent les réponses de la question 3 avec cette nouvelle modélisation ?

$\diamondsuit$

3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition C6 *Suite récurrente linéaire d'ordre 2*

On appelle *suite récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite numérique $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0,$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ sont fixés.

Remarque C7 : On se limite au cas des suites homogènes, où le second membre est 0. ♢

Définition C8 *Polynôme caractéristique*

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0.$$

On appelle *polynôme caractéristique* de la suite (u_n) le polynôme

$$X^2 + \alpha X + \beta.$$

Théorème C9 *Suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0.$$

Notons $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant du polynôme caractéristique P de (u_n).

(i) Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et

$$\exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle double r, et

$$\exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

(iii) Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, et

$$\exists!\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta).$$

Exemple C10 :

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

   Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu 2^n$.
2. Déterminer l'expression de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

   $$u_0 = 4, \quad u_1 = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

♢

⚠ Si l'on connaît la valeur de u_0 et u_1, on peut alors déterminer la valeur de λ et μ (même principe que les conditions initiales pour une équation différentielle).

Théorème C11 *Suite récurrente linéaire d'ordre 2 complexe*

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0.$$

Notons $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant du polynôme caractéristique P de (u_n). Alors

(i) Si $\Delta \neq 0$, alors P admet deux racines distinctes r_1 et r_2, et

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine double r, et

$$\exists!\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Corollaire C12

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors l'ensemble

$$\left\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0\right\}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple C13 :

1. Déterminer l'expression de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = u_1 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0.$$

2. Déterminer l'expression de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$v_0 = 0, \quad v_1 = 5, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2v_{n+2} - v_{n+1} - 3v_n = 0.$$

$\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 7.1

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Exercice 7.2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. On rappelle que f^2 désigne l'application $f \circ f$ et que Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer A^2.
2. Montrer que $f^2 + f - 2\,\mathrm{Id} = 0$.
3. En déduire que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -2.

Exercice 7.3
Déterminer le spectre des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7.4
Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tels que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}.$$

Exercice 7.5
Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7.6
Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7.7
On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. A est-elle trigonalisable dans $\mathbb{R}$? Si oui, la trigonaliser.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 7.8
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7.9
Soit $\theta \in [0, 2\pi]$ et $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. La matrice A est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Exercice 7.10
Soit f un automorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E.

1. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de f.

2. Montrer que

$$\mathrm{Sp}\left(f^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{K}/\lambda \in \mathrm{Sp}\left(f\right)\right\}.$$

Exercice 7.11

1. Déterminer l'expression de la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n.$$

2. Déterminer l'expression de la suite $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$v_0 = 5, \quad v_1 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = -9v_n.$$

3. Déterminer l'expression de la suite $(w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$w_0 = 5, \quad w_1 = 6, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} - 6w_{n+1} + 9w_n = 0.$$

Exercice 7.12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (-5x + 3y, 6x - 2y).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base de diagonalisation de f.
3. Montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ tel que $g \circ g \circ g = f$, et déterminer $g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7.13

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que φ^k est l'endomorphisme nul. On appelle alors *indice de nilpotence de* φ le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p = 0$, c'est-à-dire que $\varphi^{p-1} \neq 0$ et $\varphi^p = 0$

Soit f un endomorphisme de E.

1. On suppose dans cette question que f est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Que peut-on dire de f^{p-1} et f^p ? Formuler ces propositions à l'aide de quantificateurs.
   (b) Montrer que, pour tout $k \geq p$, $f^k = 0$.
   (c) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre.
   Indication : On pourra remarquer que si une famille est une base, alors elle ne contient pas le vecteur nul.
   (d) Montrer que $p \leq n$.
2. On suppose dans cette question que $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans la base B soit triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.
   (b) Montrer que, pour tout $d \in [\![2, n]\!]$, $f(\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_d)) \subseteq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{d-1})$.
   (c) En déduire que $f^n = 0$.
3. On suppose dans cette question que $\mathrm{Sp}(f) \neq \{0\}$.
   (a) Justifier que $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$.
   (b) En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k(x) \neq 0$.
4. Qu'a-t-on démontré dans les questions 2 et 3 ?

Exercice 7.14

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est trigonalisable.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, telle que $A = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'expression de T^k.
   Indication : On pourra décomposer astucieusement la matrice T.
5. En déduire l'expression de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut A^k si k est impair ? Si k est pair ?

Exercice 7.15

On considère l'application $f : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}_3[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_3[X], \quad f(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right).$$

1. Justifier que f est bien définie. On admet que f est linéaire.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de f, ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 7.16

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + a_2 f \circ f + \cdots + a_d \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{d \text{ fois}}.$$

On suppose que f est diagonalisable, et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

1. (a) Notons $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$. Soit $u \in E$ un vecteur propre de f. Montrer que $P(f)(u) = 0$.
   (b) Montrer que $P(f) = 0$.
2. En déduire que $\chi_f(f) = 0$.

Ce résultat s'appelle *théorème de Cayley-Hamilton*, et s'étend en fait à tous les endomorphismes, y compris ceux qui ne sont pas diagonalisables.

Exercice 7.17

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.

1. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ g = f$.
2. L'endomorphisme g est-il unique ?

Exercice 7.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer que, si A est trigonalisable, alors A admet une décomposition de Dunford, c'est-à-dire qu'il existe deux matrices $\Delta, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $A = \Delta + N$.
- Δ est diagonalisable.
- N est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = O_2$.
- Δ et N commutent.

Ce résultat est vrai (et la décomposition est unique) pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On va le démontrer en dimension 2 ; dans la suite, on fixe donc $n = 2$.

1. Montrer que $\chi_A = X^2 - (\operatorname{Tr} A)\, X + \det A$.
2. On suppose dans cette question que $(\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A > 0$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable.
   (b) Montrer que A admet une décomposition de Dunford qu'on précisera.
3. On suppose dans cette question que $(\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A = 0$.
   (a) Montrer que A est trigonalisable.
   (b) Montrer que A admet une décomposition de Dunford qu'on précisera. On exprimera Δ et N en fonction de A, I_2 et $\operatorname{Tr}(A)$.
   Indication : On pourra d'abord décomposer A sous sa forme triangulaire.
4. On suppose dans cette question que $(\operatorname{Tr} A)^2 - 4 \det A < 0$. Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford, c'est-à-dire qu'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A = \Delta + N$, $\Delta N = N \Delta$, Δ est diagonalisable et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = O_2$.
   (a) Montrer que A ne possède pas de valeurs propres réelles. A est-elle trigonalisable ?
   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de N. Montrer que $\lambda = 0$.
   (c) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que N est semblable à $\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, et en déduire que $N^2 = O_2$.
   (d) Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre réelle de Δ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé à μ. Montrer que
   $$ANX = \mu N X.$$
   (e) Montrer que μ est une valeur propre de A et conclure.

CHAPITRE VIII

PROBABILITÉS DISCRÈTES

> *-Sir, the possibility of successfully navigating an asteroid field is approximately three thousand seven hundred twenty to one !*
> *-Never tell me the odds.*

The Empire Strikes Back

Pré-requis :

- Probabilités finies
- Variables aléatoires

	☹	😐	☺
Connaître et savoir utiliser les formules de probabilités dans le cas discret			
Connaître et reconnaître les lois usuelles discrètes			
Montrer qu'une variable aléatoire admet une espérance, et la calculer			
Montrer qu'une variable aléatoire admet une variance, et la calculer			
Utiliser le théorème de transfert et les propriétés de l'espérance et de la variance pour faire des calculs sans loi explicite			

Définition 1 *Ensemble dénombrable*

Un ensemble est dit *dénombrable*[1] s'il peut s'écrire sous la forme $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$.

Théorème 2

(i) Tout ensemble fini est dénombrable.
(ii) Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
(iii) Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
(iv) Les ensembles $[a, b]$ avec $a < b$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne sont pas dénombrables.

1. On parle parfois d'ensemble *discret*, mais ce terme est plutôt réservé aux variables aléatoires ou à la topologie...

A Probabilités sur un univers dénombrable

1 Univers et évènements

On considère désormais dans la suite une expérience aléatoire admettant un nombre dénombrable d'issues.

Toutes les définitions sont données pour des familles indexés par $i \in \mathbb{N}$ mais peuvent être étendues à des familles indexées par un ensemble dénombrable quelconque (en particulier un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, fini ou infini).

Définition A1 *Univers et évènements*
On appelle *univers* l'ensemble Ω formé de toutes les issues de l'expérience aléatoire considérée. On appelle *évènement* tout sous-ensemble de $A \subseteq \Omega$. L'ensemble des évènements est noté $\mathcal{P}(A)$.

Définition A2 *Union et intersection d'évènements*
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'évènements. Alors on définit

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega / \forall i \in \mathbb{N}, \omega \in A_i\},$$
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \{\omega \in \Omega / \exists i \in \mathbb{N}, \omega \in A_i\}.$$

On notera $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ si les évènements A_i sont deux à deux incompatibles (ou disjoints).

Définition A3 *Système complet d'évènements*
Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'évènements. On dit que (A_i) est un *système complet d'évènements* ou une *partition de* Ω si

(i) Pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
(ii) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Autrement dit, si $\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \Omega$.

Définition A4 *Probabilité*
On appelle *probabilité sur* Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
(ii) Pour toute famille (finie ou dénombrable) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, la série $\sum_i \mathbb{P}(A_i)$ converge et

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Proposition A5

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements. Alors la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$ converge et

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

⚠ Toutes les propriétés vues dans le cadre des espaces probabilisés finis restent vraies dans le cas des espaces probabilisés dénombrables.

2 Indépendance et conditionnement

Théorème A6 *Formule des probabilités totales – Cas dénombrable*

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Soit (A_i) un système complet d'évènements. Alors :

1. Les séries $\sum_i \mathbb{P}(B \cap A_i)$ et $\sum_i \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$ convergent.
2. On a

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i).$$

On rappelle que deux évènements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

On note alors $A \perp\!\!\!\perp B$.

Définition/Proposition A7 *Indépendance mutuelle et deux à deux*

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille infinie d'évènements. On dit que :

- les A_i sont deux à deux indépendants si

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad (i \neq j \Rightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j).$$

- les A_i sont mutuellement indépendants si, pour tout $J \subseteq \mathbb{N}$ fini

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. **La réciproque est fausse.**

⚠ Même en cas d'indépendance, on ne dispose pas de formule pour $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$.[2]

2. Sauriez-vous donner un sens à un produit infini ?

B Variables aléatoires discrètes

Dans la suite (Ω) est un univers dénombrable et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathbb{P}$. On généralise la notion de variable aléatoire finie vue en première année.

1 Définitions

Formellement, une variable aléatoire réelle est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On la considère plutôt **comme un nombre**,[3] qui peut prendre différentes valeurs suivant l'issue de l'expérience aléatoire considérée.

Définition B1 *Variable aléatoire discrète*

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X est *discrète* si $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable, c'est-à-dire si X prend un nombre de valeurs dénombrables.

Caractériser une variable aléatoire discrète revient à déterminer :

(i) son image $X(\Omega)$
(ii) sa loi $\mathbb{P}_X$, c'est-à-dire déterminer $\mathbb{P}(X = i)$ pour tout $i \in X(\Omega)$.

Exemple B2 :
Dans chaque cas, justifier si la variable aléatoire X est discrète.

1. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(100, \frac{3}{4}\right)$.
2. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile, et X est le nombre de lancers effectués.
3. On lance une fléchette sur une cible dont le rayon vaut 30 centimètres, et X est la distance entre le point d'impact et le centre.
4. On prend un individu au hasard, et X est son âge (en années).
5. On allume une ampoule, et X est le temps écoulé avant qu'elle ne grille.

$\diamondsuit$

Toutes les variables aléatoires finies sont discrètes (car les ensembles finis sont dénombrables). En particulier, ce qu'on connaît déjà sur les variables aléatoires finies reste vrai dans tout ce chapitre.

Proposition B3

Soit X une variable aléatoire discrète. Alors $(\{X = i\})_{i \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements. En particulier,

$$\sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = i) = 1.$$

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t).$$

La fonction de répartition caractérise la loi de X. Il faut savoir tracer la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète dont on connaît la loi, et inversement déterminer la loi d'une variable aléatoire dont on connait la fonction de répartition.

3. On utilise donc des abus de notation propres aux nombres et des notations de fonctions. Pour ceux qui ne sont pas à l'aise, on se contentera d'utiliser les notations de fonctions.

2 Lois discrètes de référence

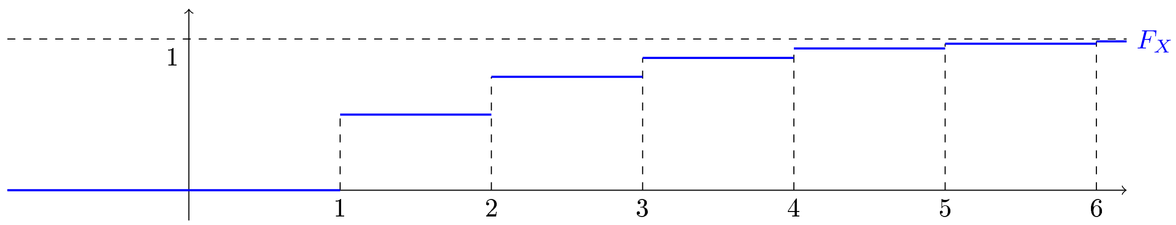
Définition B4 *Loi géométrique*

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X *suit une loi géométrique de paramètre* p, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, si

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Interprétation : la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ représente le rang du premier succès quand on répète (de manière indépendante) une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p.

Représentons la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$:



Remarque B5 : Soit $p \in]0,1[$ et $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. En reconnaissant une série géométrique de raison $1-p$ (donc convergente), on a bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

$\diamondsuit$

Exemple B6 :

On lance un dé jusqu'à obtenir 5 ou 6. Alors le nombre de lancers effectués suit une loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. $\diamondsuit$

Définition B7 *Loi de Poisson*[4]

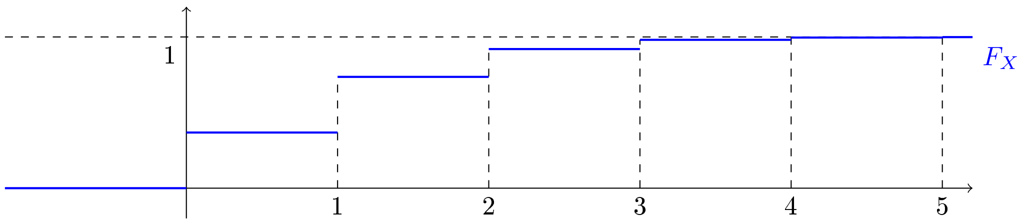
Soit $\lambda > 0$. On dit que X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ, et on note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, si

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Interprétation : si on considère qu'un évènement relativement rare se produit en moyenne λ fois pendant un certain laps de temps, alors on modélisera le nombre d'occurrences (durant ce laps de temps) par une loi $\mathscr{P}(\lambda)$.

Représentons la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$:

4. Siméon Denis Poisson (1781-1840) : Mathématicien et physicien français.



Remarque B8 : Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. En reconnaissant une série exponentielle (donc convergente), on a bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

$\diamondsuit$

Exemple B9 :
Pendant les cours de maths, Arthur[5] passe son temps à regarder par la fenêtre. Le lundi matin, il a vu passer 129 voitures rouges entre 8h et 11h. Il estime donc que le nombre de voitures rouges qui passeront pendant l'après-midi entre 15h et 16h suivra une loi de Poisson $\mathscr{P}(43)$. $\diamondsuit$

Théorème B10 *Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson*
Soit $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in]0,1[$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} np_n = \lambda$. Soit X_n une variable aléatoire de loi $\mathscr{B}(n, p_n)$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

On peut donc approcher la loi de X_n par une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ quand n est grand.

Remarque B11 (*Interprétation*) : On considère qu'un évènement, par exemple le passage d'une voiture rouge devant la fenêtre, se produit en moyenne λ fois pendant une heure. On note X le nombre de voitures passées en une heure.

- Pour savoir combien de voitures passent en une heure, on divise cette heure en minutes et on somme le nombre de voitures passées pendant chaque minute. Supposons pour simplifier que deux voitures ne passent pas pendant la même minute, et que les passages de voitures sont indépendants d'une minute sur l'autre. Chaque minute, on compte donc zéro ou une voiture. Alors :

$$X \simeq \sum_{k=1}^{60} B_k, \quad \forall k \in [\![1, 60]\!], \quad B_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{\lambda}{60}\right).$$

- Si ces hypothèses paraissent trop restrictives, on divisera plutôt l'heure en secondes et on refait le même raisonnement. Alors :

$$X \simeq \sum_{k=1}^{3600} B'_k, \quad \forall k \in [\![1, 3600]\!], \quad B'_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{\lambda}{3600}\right).$$

- On pourrait faire la même chose pour les millisecondes, etc.

Autrement dit, la définition de la loi de Poisson est "la limite" quand $n \to +\infty$ de lois binomiales $\mathscr{B}\left(n, \frac{p}{n}\right)$. On a illustré ici le cas $p_n = \frac{\lambda}{n}$. $\diamondsuit$

5. Le prénom a été modifié.

3 Espérance

⚠ C'est ici qu'on trouve la principale différence avec les probabilités finies : une variable aléatoire peut ne pas avoir d'espérance ou de variance.

Définition B12 *Espérance*
Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X *admet une espérance* (ou qu'elle *est d'espérance finie*) si la série $\sum_i i\mathbb{P}(X=i)$ **converge absolument**. On appelle alors *espérance de* X le nombre

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in X(\Omega)} i\mathbb{P}(X=i).$$

Remarque B13 : En notant $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, on peut reformuler cette définition de la façon suivante. X admet une espérance si la série $\sum_n x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ converge absolument, et on note alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X=x_n).$$

Ces deux formules prolongent la définition de l'espérance pour les variables aléatoires finies, la seule différence est la façon d'énumérer l'ensemble $X(\Omega)$. [6] ♢

⚠ Dans la plupart des cas pratiques, on a $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et donc la série $\sum_i i\mathbb{P}(X=i)$ converge si, et seulement si, elle converge absolument (c'est une série à termes positifs).

Proposition B14
Toute variable aléatoire finie admet une espérance.

Proposition B15 *Espérance d'une loi géométrique*
Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Alors X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.$$

Proposition B16 *Espérance d'une loi de Poisson*
Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

Exemple B17 :
On admet dans cet exercice que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $\alpha > 0$ et soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{\alpha}{(n+1)^2}.$$

6. La condition de convergence absolue assure que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération des x_n.

1. Déterminer la valeur du paramètre α.
2. X admet-elle une espérance ?

$\diamondsuit$

Proposition B18 *Linéarité de l'espérance*

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **admettant une espérance**. Alors :

(i) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

(ii) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et
$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

Théorème B19 *Théorème de transfert*

Soit X une variable aléatoire, et on note $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors :

(i) $f(X)(\Omega) = \{f(x_n) / n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $f(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_n f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ **converge absolument**.

Dans ce cas, on a
$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n).$$

Exemple B20 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de α la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet-elle une espérance ?
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ dans ce cas.

$\diamondsuit$

4 Variance

Proposition B21

Soit X une variable aléatoire discrète. Si X^2 admet une espérance alors X admet une espérance.

De manière générale, pour $p, q \in \mathbb{N}$, si X^{p+q} admet une espérance, alors X^p admet une espérance.

Définition/Proposition B22 *Variance*

Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X *admet une variance* si X^2 admet une espérance. On appelle alors *variance de X* le nombre
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

On appelle *écart-type de X* le nombre $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

⚠ Si X admet une variance alors X admet une espérance, mais la réciproque est généralement fausse.

Proposition B23

Toute variable aléatoire finie admet une variance.

Proposition B24 *Variance d'une loi géométrique*

Soit $p \in]0,1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Alors X admet une variance et

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Proposition B25 *Variance d'une loi de Poisson*

Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet une variance et

$$\mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Exemple B26 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{n^3 + n^2}.$$

1. X admet-elle une espérance ? Si oui la calculer.
2. X admet-elle une variance ? Si oui la calculer.

♢

Proposition B27 *Manipulation de la variance*

Soit X une variable aléatoire discrète **admettant une variance**. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une variance et

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

Proposition B28 *Inégalité de Bienaymé[7]-Tchebychev[8]*

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. Alors, pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

7. Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) : Mathématicien français.
8. Pafnouti Tchebychev (1821-1894) : Mathématicien russe.

Proposition B29 *Lois usuelles*

Toutes les lois usuelles admettent une espérance et une variance, et on a le tableau suivant :

Loi	Paramètre(s)	Image	Type	Espérance	Variance
$X \hookrightarrow \delta_a$	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	Certaine	a	0
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$	$p \in]0,1[$	$\{0,1\}$	Finie	p	$p(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}^*, p \in]0,1[$	$[\![0,n]\!]$	Finie	np	$np(1-p)$
$X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a,b]\!])$	$a,b \in \mathbb{Z}, a < b$	$[\![a,b]\!]$	Finie	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$
$X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$	$p \in]0,1[$	$\mathbb{N}^*$	Discrète	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
$X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	Discrète	λ	λ

C Exercices

Exercice 8.1

Soit $a, b \in]0,1[$. On dispose de deux pièces, la pièce A faisant pile avec probabilité a et la pièce B faisant pile avec probabilité b. Pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard puis on applique la stratégie suivante :

- si on fait pile, on garde la même pièce au prochain lancer ;
- si on fait face, on change de pièce pour le prochain lancer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les évènements A_n par "lancer la pièce A au n-ème lancer, et P_n par "faire pile au n-ème lancer".

1. Exprimer $\mathbb{P}(P_n)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que la suite (u_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(A_n) - \frac{1-b}{2-a-b}$$
est une suite géométrique.
4. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(A_n)$ puis $\mathbb{P}(P_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8.2

Soit $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

1. (a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$
   (b) Déterminer la probabilité que X soit paire.
2. On définit la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Montrer que Y est bien définie, qu'elle admet une espérance, puis calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 8.3

Dans un certain pays, les couples ont le droit d'avoir un nombre illimité d'enfants, et décident d'avoir des enfants jusqu'à obtenir un garçon. Pour un couple fixé, on note N son nombre d'enfants.

1. Donner la loi de N.

2. Exprimer la proportion de garçon P en fonction de N.
3. Montrer que la variable aléatoire P admet une espérance, puis calculer $\mathbb{E}(P)$.

Exercice 8.4

On lance une pièce truquée faisant pile avec probabilité $p \in]0,1[$) successivement jusqu'à l'obtention du deuxième pile. On note X le nombre de face obtenus au cours de ces lancers successifs. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8.5

Soit $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$. On considère que le nombre d'appels reçus au standard du SAMU d'Orléans sur une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, on suppose que chaque appel a une probabilité p de nécessiter le déplacement d'une équipe, et ce de manière indépendante des autres appels. On note X le nombre d'appels reçus sur une journée fixée, et Y le nombre d'appels nécessitant l'envoi d'une équipe

1. (a) Conditionnellement à l'évènement $\{X = 0\}$, que vaut Y ?
   (b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Conditionnellement à l'évènement $\{X = i\}$, justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. (a) Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$.
   (b) En utilisant la formule de probabilités totales, montrer que Y suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(p\lambda)$.
3. En 2018, le SAMU d'Orléans a reçu 273 000 appels. Suite à ces appels, 12 000 sorties d'une équipe vers le lieu de détresse ont été effectuées. Quelles valeurs de λ et p va-t-on fixer pour modéliser la situation ?

Exercice 8.6

Pendant une heure, on observe un tronçon de route fixé. On note X le nombre de voitures rouges qui passe, et Y le nombre de voitures vertes. On suppose que X et Y sont indépendantes, et suivent respectivement des lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$ avec $\lambda, \mu \in]0, +\infty[$ fixés.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire $S = X + Y$.
   (a) Interpréter la variable aléatoire S et formuler une conjecture concernant sa loi de probabilité.
   (b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}$, on a
   $$\mathbb{P}(S = s) = \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = s - k).$$
   (c) Montrer que S suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
2. On fixe désormais $s \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, s]\!]$, on a
   $$\mathbb{P}(X = k | S = s) = \frac{\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = s - k)}{\mathbb{P}(S = s)}.$$
   (b) Montrer que, sachant $\{S = s\}$, X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

Exercice 8.7

Soit $p \in]0,1[$ et U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. On considère la matrice
$$A = \begin{bmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. (a) Montrer que si $U \neq V$ alors A est diagonalisable.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
2. Calculer $\mathbb{P}(U = V)$. En déduire la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 8.8

Un concierge cherche à ouvrir la porte d'entrée d'un grand magasin. Il dispose pour cela d'un trousseau de 10 clés qu'il essaie les unes après les autres. On note X le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte.

1. Quand le concierge est ivre, il essaie chaque clé puis la remet dans son trousseau, et essaie une nouvelle clé sans faire attention s'il l'a déjà testée ou pas.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Quel est le nombre moyen d'essais nécessaires pour ouvrir la porte ?
2. Quand le concierge est sobre, il essaie chaque clé et, si la clé ne convient pas, il la laisse de côté et essaie une nouvelle clé qu'il n'a pas testée.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Quel est le nombre moyen d'essais nécessaires pour ouvrir la porte ?
3. Aujourd'hui, il a fallu 8 essais au concierge pour ouvrir la porte. D'après sa femme, il est ivre un jour sur trois. Déterminer la probabilité qu'il soit ivre aujourd'hui.

EXERCICE 8.9

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On dit que X est *sans mémoire* si

$$\forall (k, m) \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > m + k | X > m) = \mathbb{P}(X > k).$$

1. On suppose dans cette question que Y suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(Y > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que Y est sans mémoire.
2. On suppose dans cette question que Z est une variable aléatoire discrète sans mémoire.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(Z > 1)\,\mathbb{P}(Z > n - 1).$$
   (b) En déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(Z > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de $\mathbb{P}(Z > 1)$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(Z = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de $\mathbb{P}(Z > 1)$.
   (d) Montrer que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
3. Conclure.
4. Expliquer le terme "sans mémoire".

EXERCICE 8.10

Paul et Quentin jouent à un jeu. Ils tirent un nombre X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ils jouent avec les règles suivantes :

- Si X est impair, Quentin donne X euros à Paul.
- Si X est pair, Paul donne X euros à Quentin. En particulier, si $X = 0$, on considère que la partie est nulle.

1. On note p la probabilité que Paul gagne le jeu et q la probabilité que Quentin gagne le jeu. Si $X = 0$, la partie est nulle et personne ne gagne.
   (a) Calculer la probabilité que quelqu'un gagne.
   (b) Justifier que $p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\lambda}$.
   (c) Calculer $p - q$.
   (d) Déduire des questions précédentes les valeurs de p et q.
2. On note G la variable aléatoire égale au gain de Paul, c'est-à-dire la différence entre la somme d'argent qu'il aura à la fin du jeu et la somme d'argent qu'il avait au début (le gain peut donc être négatif).
   (a) Exprimer G en fonction de X.
   (b) Montrer que G admet une espérance puis déterminer $\mathbb{E}(G)$.
3. Déterminer le gain moyen de Quentin.
4. Le jeu est-il équilibré ?

EXERCICE 8.11

On considère une rue (supposée infinie des deux côtés) divisée en cases numérotées $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ À l'instant 0, un individu se trouve sur la case 0 et, à chaque instant, il se déplace sur une case adjacente de manière équiprobable. Par exemple, à l'instant 1, il se déplace au hasard vers la droite sur la case 1 ou vers la gauche sur la case -1. On note X_n le numéro de la case où l'individu se trouve à l'instant $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la loi de X_0, X_1, X_2.
2. À l'instant n, on note Y_n le nombre total de déplacements effectués par l'individu vers la droite. Déterminer la loi de Y_n, puis son espérance et sa variance.
3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
   (b) Montrer que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $n + k$ est pair si, et seulement si, n et k ont même parité.
   (c) Déterminer la loi de X_n.

EXERCICE 8.12

On joue à pile ou face avec une pièce truquée dont la probabilité de faire pile est $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants. On arrête le jeu lorsqu'on a fait deux pile consécutifs, et on note alors X le nombre total de lancers effectués. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement "obtenir pile au n-ème lancer" et $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$, écrire l'évènement $\{X = n\}$ à l'aide de A_n et $\overline{A}_n$ puis calculer p_n.
2. En distinguant deux cas, selon le résultat du premier lancer, montrer que
$$\forall n \geq 4, \quad p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}.$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.

EXERCICE 8.13

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

EXERCICE 8.14

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction *sinus hyperbolique* par :
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On définit une nouvelle variable aléatoire discrète Y par :
$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair ou } X = 0 \\ \dfrac{X}{2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. (a) Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y ?
   (b) Montrer que $\mathbb{P}(Y = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que $\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda}(1 + \mathrm{sh}(\lambda))$.
3. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance et que
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda\left(1 - e^{-2\lambda}\right)}{4}.$$

EXERCICE 8.15

Deux archers, Albert et Bernard, tirent sur une cible chacun leur tour. Le gagnant est celui qui touche la cible en premier. Albert commence à tirer, et il a une probabilité p_A de toucher la cible. Bernard a, lui, une probabilité p_B de toucher la cible. On suppose que $p_A, p_B \in]0, 1[$.

1. (a) Déterminer la probabilité qu'Albert gagne à son n-ème essai.
   (b) Déterminer la probabilité qu'Albert gagne.
2. (a) Déterminer la probabilité que Bernard gagne.
   (b) Montrer que le jeu se termine presque sûrement (c'est-à-dire avec probabilité 1).
3. (a) Montrer que, si $p_A \geq \dfrac{1}{2}$, alors le jeu ne peut pas être équilibré.
   (b) Pour quelles valeurs de p_A et p_B le jeu est-il équilibré ?

CHAPITRE IX

PRODUITS SCALAIRES

> *Rien n'est plus facile à apprendre que la géométrie pour peu qu'on en ait besoin.*
>
> Sacha Guitry

Pré-requis :

- Compléments d'algèbre linéaire.

	☹	😐	☺
Savoir utiliser les propriétés fondamentales du produit scalaire et de la norme			
Connaître et reconnaître les exemples principaux de produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}^0([a,b])$			
Déterminer une base orthonormée d'un espace vectoriel			
Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel			
Déterminer l'expression de la projection ou de la symétrie orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie			
Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie			

Dans tout le chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On ne travaillera pas sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

A Structure préhilbertienne

1 Produit scalaire

Définition A1 *Produit scalaire*

Soit $\varphi \in \mathcal{F}\left(E^2, \mathbb{R}\right)$. On dit que φ est un *produit scalaire sur E* si :

(i) φ est *bilinéaire* :

$$\forall x, y, z \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z) \\ \varphi(z, \lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(z, x) + \mu \varphi(z, y) \end{cases}$$

(ii) φ est *symétrique* :

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

(iii) φ est *positive* :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

(iv) φ est *définie* :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

Dans la suite, on notera les produits scalaires $\langle x, y\rangle$. Autres notations usuelles : $x \cdot y$ ou $(x|y)$.

Conséquence directe de la bilinéarité : pour tout $x \in E$, on a

$$\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0.$$

Pour montrer que $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est un produit scalaire, on montrera que :

- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
- $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$ (par symétrie, $\langle\cdot, \cdot\rangle$ sera bilinéaire) ;
- $\langle x, x\rangle \geq 0$;
- $(\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$ (la réciproque est évidente par bilinéarité)

Définition/Proposition A2 *Produit scalaire canonique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application définie pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle produit scalaire *canonique*.

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est déjà bien connu, même si on le note plutôt $u \cdot v$:

$$(u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Exemple A3 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. ♢

Exemple A4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application définie pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^\intercal B)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ♢

Exemple A5 :

Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto X^\intercal Y$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. ♢

Définition A6 *Espace préhilbertien*[1] *et espace euclidien*[2]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E *est un espace préhilbertien* s'il existe un produit scalaire sur E. On dit que E *est un espace euclidien* si E est un espace préhilbertien de dimension finie.

Remarque A7 : Dans la suite, quand on écrira "soit E un espace préhilbertien/euclidien", cela introduira automatiquement un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par défaut. $\diamondsuit$

On remarquera que tout sous-espace vectoriel F d'un espace E préhilbertien (resp. euclidien) est automatiquement préhilbertien (resp. euclidien), grâce au produit scalaire hérité de E.

2 Norme

Dans toute cette section, E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition A8 *Norme*
Soit $x \in E$. On appelle *norme euclidienne de x* le nombre

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

⚠ À cause de la racine carrée, on travaillera quasi-systématiquement avec des normes **élevées au carré**.

Exemple A9 :
Déterminer les normes associées aux produits scalaires suivants :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
2. $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(A^\intercal B)$.

$\diamondsuit$

Proposition A10
La norme $\|\cdot\|$

(i) est *définie* :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

(ii) est *positive* :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0.$$

(iii) est *homogène* :

$$\forall x \in E, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|.$$

1. David Hilbert (1862-1943) : Mathématicien allemand. La structure préhilbertienne est un pré-requis des espaces de Hilbert.
2. Euclide (vers 300 av. J.C.) : Mathématicien grec.

(iv) vérifie *l'inégalité triangulaire* :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De manière générale, une application qui vérifie ces quatre critères est appelée *norme*, mais elle n'est pas forcément associée à un produit scalaire (on par alors de *norme non-euclidienne*).

Définition A11 *Distance*

Soit $x, y \in E$. On appelle *distance entre x et y* le nombre :

$$\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = \|y - x\|.$$

C'est avec les distances que l'on peut étendre les notions de suites et de convergence dans des espaces plus généraux que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: les espaces normés (munis d'une norme), ou les espaces métriques (munis d'une distance).

Proposition A12 *Identités remarquables*

Pour tous $x, y \in E$,

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
(iii) $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Proposition A13 *Identités du parallélogramme et de polarisation*

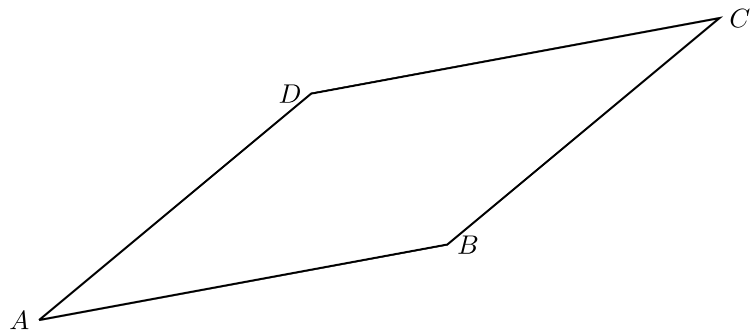
(i) Identité du parallélogramme : pour tous $x, y \in E$,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

(ii) Identité de polarisation : pour tous $x, y \in E$,

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.



L'identité de polarisation permet de retrouver le produit scalaire à partir de la norme. On remarque qu'on a aussi

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}.$$

Théorème A14 *Inégalité de Cauchy*[3]*-Schwarz*[4]
Soit E un espace préhilbertien réel. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

⚠ On utilise régulièrement l'inégalité de Cauchy-Schwarz élevée au carré :

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle .$$

Exemple A15 :

1. Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$
2. À quelle condition sur $x_1, \ldots, x_n$ l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

$\diamondsuit$

Remarque A16 (*Et les complexes dans tout ça ?*) : Une fois n'est pas coutume, il existe une grosse différence entre le cas réel et le cas complexe en ce qui concerne les produits scalaires.

Dans le cas complexe, on remarque que le "produit scalaire usuel" n'est pas un produit scalaire. En effet, l'application

$$\varphi \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ ((z_1, z_2), (z_1', z_2')) & \mapsto & z_1 z_1' + z_2 z_2' \end{array}$$

n'est pas positive : $\varphi((i, i), (i, i)) = 2i^2 = -2$. Toute la théorie bâtie jusqu'alors ne fonctionne plus. Dans le cas complexe, il faut parler de produit hermitien.[5] Le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^2$ est

$$\langle (z_1, z_2), (z_1', z_2')\rangle = \overline{z_1}.z_1' + \overline{z_2}.z_2'.$$

La structure hermitienne est l'équivalent complexe de la structure préhilbertienne réelle. $\diamondsuit$

B Orthogonalité et orthonormalité

Dans toute cette partie, E est un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

⚠ Toute la suite dépend fortement du produit scalaire choisi au départ.

1 Familles orthogonales

3. Augustin Cauchy (1789-1857) : Mathématicien français.
4. Hermann Schwarz (1843-1921) : Mathématicien allemand.
5. Charles Hermite (1822-1901) : Mathématicien français.

Définition B1 *Orthogonalité*

Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$. On note $x \perp y$.

Une famille A de vecteurs de E est dite *orthogonale* si, pour tous $x, y \in A$ distincts, x et y sont orthogonaux.

Exemple B2 :
La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel. ♢

Théorème B3 *Théorème de Pythagore*[6]

Soit $A = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2.$$

Définition B4 *Famille orthonormée*

Un vecteur $x \in E$ est dit *unitaire* si $\|x\| = 1$.

Une famille A de vecteurs de E est dite *orthonormée* (ou orthonormale) si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux, c'est-à-dire si

$$\forall x, y \in A, \quad \langle x, y\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Autrement dit, une famille orthonormée est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont unitaires. On parle parfois de famille *orthonormale.*

On pourra utiliser le *symbole de Kronecker*[7] :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Exemple B5 :
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel. ♢

Exemple B6 :
On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^\intercal B).$$

La famille $\left(I_2, O_2, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)$ est-elle orthogonale ? Orthonormée ? ♢

Proposition B7

(i) Toute famille orthogonale dont les vecteurs sont non-nuls est libre.
(ii) Toute famille orthonormée est libre.

6. Pythagore (vers 500 av. J.C.) : Mathématicien grec.
7. Leopold Kronecker (1823-1891) : Mathématicien allemand.

2 Procédé d'orthonormalisation

Théorème B8 *Procédé d'orthonormalisation de Gram[8]-Schmidt[9]*
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $A' = (e_1, \dots, e_p)$ telle que

(i) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_k)$.
(ii) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle e_k, u_k \rangle > 0$.

Algorithme d'orthonormalisation :

(i) Posons $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$. Alors la famille $A_1 = (e_1)$ est bien orthonormée et on a bien $\mathrm{Vect}\,(e_1) = \mathrm{Vect}\,(u_1)$.
(ii) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Supposons qu'on ait construit la famille $A_k = (e_1, \dots, e_k)$ orthonormée et vérifiant

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \dots, u_i).$$

On construit e_{k+1} de la manière suivante :

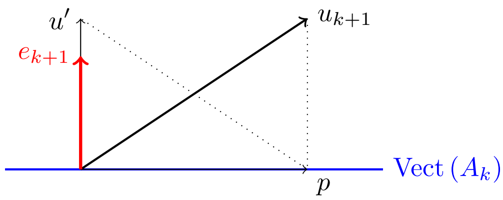
$$p = \sum_{i=1}^{k} \langle u_{k+1}, e_i \rangle\, e_i, \quad u' = u_{k+1} - p, \quad e_{k+1} = \frac{u'}{\|u'\|}.$$

La famille $A_{k+1} = (e_1, \dots, e_{k+1})$ est alors orthonormée et

$$\mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_{k+1}).$$

On prendra finalement $A' = A_p$.

Remarque B9 : Remarquons que les u_i ne sont pas nuls car A est libre. L'unicité de la famille A' est assurée par la condition $\langle e_k, u_k \rangle > 0$. Hors son aspect théorique important, il convient de savoir mettre en place cet algorithme en pratique sur des exemples simples pour transformer une famille libre (resp. base) donnée en famille (resp. base) orthonormée.



◊

Exemple B10 :
On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille $((1,0,1), (1,1,0), (1,0,0))$. ◊

3 Produit scalaire dans une base orthonormée

Théorème B11
Tout espace euclidien possède une base orthonormée.

8. Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) : Mathématicien danois.
9. Erhard Schmidt (1876-1959) : Mathématicien allemand.

On remarquera que les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont orthonormées pour les produits scalaires usuels des espaces considérés.

Proposition B12

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tous $x, y \in E$, notons $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathrm{mat}_B(x)$ et $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathrm{mat}_B(y)$ les coordonnées respectives de x et y dans la base B. Alors :

(i) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = \langle x, e_k \rangle$.

(ii) $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

(iii) $\langle x, y \rangle == X^\intercal Y = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

(iv) $\|x\| = \sqrt{X^\intercal X} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.

C Espaces vectoriels orthogonaux

1 Orthogonal d'un espace vectoriel

Définition C1

Deux sous-espaces F et G de E sont dits *orthogonaux* si, pour tous $x \in F, y \in G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition C2 *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel*

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F l'ensemble

$$F^\perp = \{x \in E / \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

⚠ "F et G sont orthogonaux" ne veut pas dire "$G = F^\perp$" : $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F.

Exemple C3 :
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, on définit l'hyperplan $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$.
Montrer que $H^\perp = \mathrm{Vect}(1, -1, 2)$. ♢

Proposition C4

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E, et F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Proposition C5

(i) $E^\perp = \{0\}$.
(ii) $\{0\}^\perp = E$.

Si F admet une base $(e_1, \dots, e_p)$, on détermine $F^\perp$ en résolvant :

$$x \in F^\perp \iff \forall k \in [\![1,p]\!], \quad \langle x, e_k \rangle = 0 \iff \dots$$

Si $F \subseteq G$ alors $G^\perp \subseteq F^\perp$.

Exemple C6 :
On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On définit $F = \operatorname{Vect}((2,1,0,1),(0,1,3,2))$. Déterminer $F^\perp$. $\diamondsuit$

Théorème C7

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E. Alors :

(i) $F \oplus F^\perp = E$.
(ii) $\dim\left(F^\perp\right) = \dim E - \dim F$.
(iii) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Remarque C8 :

- Le point (i) du théorème reste vrai sous l'hypothèse plus faible "F est de dimension finie" (c'est-à-dire que, tant que F est de dimension finie, E peut-être de dimension infinie).
- Tous ces résultats sont faux si F n'est pas de dimension finie.

$\diamondsuit$

Exemple C9 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}\left(A^\intercal B\right).$$

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices $M_S \in S_n(\mathbb{R})$ et $M_A \in A_n(\mathbb{R})$, que l'on explicitera en fonction de A, telles que $A = M_S + M_A$.
3. En déduire que $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$.

$\diamondsuit$

2 Projection orthogonale et distance

Dans toute cette partie, F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E.

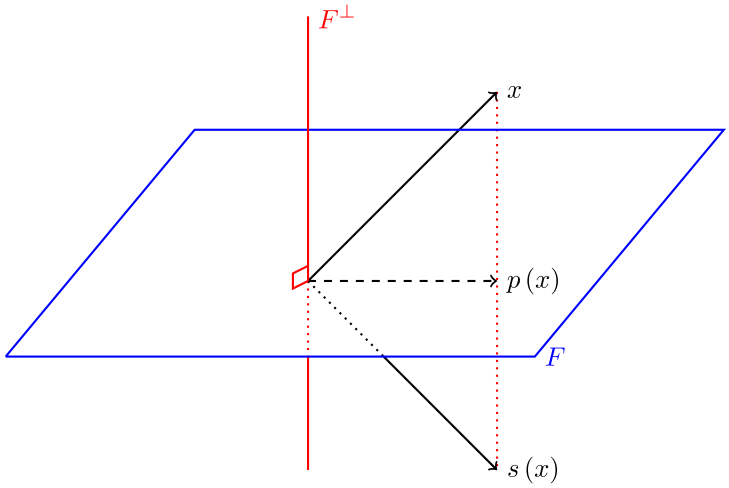
Définition C10 *Projecteur et symétrie orthogonale*

On appelle *projecteur orthogonal sur* F le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. On appelle *symétrie orthogonale par rapport* F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Ces deux applications sont bien définies car $F \oplus F^{\perp} = E$.

On rappelle que, si p et s sont respectivement le projecteur et la symétrie sur F parallèlement à un supplémentaire G de F, alors

$$p \circ p = p, \quad s \circ s = \mathrm{Id}, \quad p = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} + s\right), \quad s = 2p - \mathrm{Id}\,.$$



Théorème C11

On définit respectivement p et s le projecteur et la symétrie orthogonaux sur F. Soit $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Alors, pour tout $x \in E$,

$$p\left(x\right) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle\, e_k, \quad s\left(x\right) = 2\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle\, e_k - x.$$

Pour déterminer l'expression de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_p)$:

1. On détermine une base orthonormée $B' = \left(u'_1, \ldots, u'_p\right)$ de F à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à B.
2. Pour tout $x \in F$ et $k \in [\![1, p]\!]$, on calcule $\langle x, u'_k \rangle$.
3. On aura alors $p\left(x\right) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, u'_k \rangle$.

Définition/Proposition C12 *Distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie*

Soit $x \in E$. On appelle *distance de x à F* le nombre

$$d\left(x, F\right) = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Ce minimum est atteint et, si on note p la projection orthogonale sur F, alors

$$d\left(x, F\right) = \|x - p\left(x\right)\|.$$

Exemple C13 :
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\left((1,-1,1,1),(1,1,1,1)\right)$.
2. Déterminer la distance du vecteur $(4,1,3,2)$ à F.

$\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 9.1

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on note

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)\,Q(k).$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. (a) Calculer $\left\langle X^2+1, X^2+X+1\right\rangle$ et $\left\langle X^2-3X, 2X-1\right\rangle$.
   (b) Calculer $\|X^2+1\|$, $\|X^2+X+1\|$ et $\|2X^2-5X\|$.
3. On définit

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(0) = 0\}, \quad G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] / \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}.$$

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer une base de F et de son orthogonal.
   (c) Déterminer une base de G et de son orthogonal.
4. Montrer que la famille $B = \left(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\right)$ est une famille orthogonale puis déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9.2

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces orthogonaux d'un espace préhilbertien E. Soit A_1 et A_2 des familles orthonormées respectives de F_1 et F_2. Montrer que $A_1 \cup A_2$ est orthonormée.

Exercice 9.3

Dans cet exercice, on identifie l'ensemble des matrices réelles de taille 1×1 et $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille $n \times 1$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle = X^{\intercal} Y$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et soit $X \in E$. Montrer que AX et X sont orthogonaux dans E.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\ker M = \left(\mathrm{Im}\, M^{\intercal}\right)^{\perp}.$$

Exercice 9.4

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, et on définit

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g\rangle = f(0)\,g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt.$$

1. Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Calculer $\langle \cos, \sin \rangle$ et $\langle \mathrm{Id}, \exp \rangle$.
3. Calculer $\| \cos \|$, $\| \sin \|$ et $\| \exp \|$.
4. Que vaut l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire ?

Exercice 9.5

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et on définit

$$F = \mathrm{Vect}\left((1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0)\right).$$

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Déterminer une base orthonormée de F.

Exercice 9.6

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et on pose

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\right\}.$$

1. Justifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. On définit les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, 0), \quad u_2 = (-2, 1, -1), \quad u_3 = (1, 1, 1).$$

   Déterminer la distance des vecteurs u_1, u_2 et u_3 à F.

Exercice 9.7

1. Soit f une fonction polynomiale.
   (a) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} t^2 |f(t)| e^{-t} = 0$.
   (b) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que l'application définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$$

   est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.8

On considère $E = \mathbb{R}_4[X]$.

1. Pour $P, Q \in E$, tels que $P = \sum_{k=0}^{4} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{4} b_k X^k$, on note $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{4} 2^k a_k b_k$.
   (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
   (b) Déterminer $\mathbb{R}_0[X]^{\perp}$.
   (c) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (d) Déterminer l'expression du projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Mêmes questions avec $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) Q(t) dt$.

Exercice 9.9

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. On définit

$$F = \{(\lambda, -2\lambda, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Justifier que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer l'expression du projecteur orthogonal p_F sur F.
   (c) Calculer la distance de $(1,0,1)$ à F.
2. On définit
$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\right\}.$$
   (a) Justifier que G est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
   (b) En utilisant la question 1b, déterminer l'expression du projecteur orthogonal p_G sur G.
   (c) Calculer la distance de $(1,0,1)$ à G.

Exercice 9.10

On considère E l'espace des fonctions réelles continues et 2π-périodiques, et on pose
$$\forall f,g \in E, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,dt.$$

1. Montrer que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : t \mapsto \sin(kt)$. Calculer $\|f_k\|$.
3. Montrer que la famille $F = (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

Exercice 9.11

On définit, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,
$$\langle P,Q\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P\left(e^{it}\right) Q\left(e^{-it}\right) dt.$$

1. (a) Justifier que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\overline{P\left(e^{it}\right)} = P\left(e^{-it}\right).$$
   (b) Déterminer $\overline{\langle P,Q\rangle}$ et en déduire que $\langle P,Q\rangle \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.12

Soit $x,y,z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

1. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$.
2. À quelle condition sur x,y,z l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

Exercice 9.13

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$.

1. Montrer que
$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\right) \geq (b-a)^2.$$
2. À quelle condition sur f cette inégalité est-elle une égalité ?

Exercice 9.14

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par
$$\forall f,g \in E, \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt.$$

Soit $F = \{f \in F / f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension infinie.
3. Montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
   Indication : pour $f \in F^{\perp}$, on pourra considérer $g : x \mapsto xf(x)$.

Exercice 9.15

Soit F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. Montrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
   Indication : on pourra utiliser la question précédente.

Exercice 9.16

Soit E un espace préhilbertien. Soit $x, y \in E$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|x + ty\| \geq \|x\|.$$

Montrer que x et y sont orthogonaux.

Exercice 9.17

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt.$$

On définit

$$F = \{f \in E / \forall t \in [-1,0], f(t) = 0\}, \quad G = \{g \in E / \forall t \in [0,1], g(t) = 0\}.$$

1. (a) Montrer que $G \subseteq F^{\perp}$.
   (b) Montrer que $F^{\perp} \subseteq G$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
2. F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 9.18

Calculer $\delta = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt$.
Indication : on pourra interpréter δ comme le carré de la distance d'un polynôme à un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien bien choisi.

Exercice 9.19

On considère E l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\varphi_0 : x \mapsto 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi_n : x \mapsto \cos(nx), \quad \psi_n : x \mapsto \sin(nx).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $B_N = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ et $\mathcal{T}_N = \mathrm{Vect}(B_N)$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

   $$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$

   est un produit scalaire sur E.

On considère dans la suite E muni de la structure préhilbertienne associée à ce produit scalaire.

3. (a) Montrer que B_N est une famille orthogonale.
   (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{T}_N$, qu'on notera B'_N.
4. Soit $f \in E$. On note S_N le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{T}_N$.
   (a) En utilisant la question 3b, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

   où l'on déterminera l'expression des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.
   (b) Montrer que

$$\|S_N\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

CHAPITRE X

COMPLÉMENTS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

❝ *L'équation différentielle est une façon de regarder.* ❞

Antoine de Saint-Exupéry

Pré-requis :

- Équations différentielles linéaires.
- Réduction des matrices.

	☹	😐	☺
Déterminer les solutions homogènes d'une EDL1			
Savoir appliquer la méthode de variation de la constante			
Déterminer les solutions homogènes d'une EDL2 à coefficients constants			
Déterminer des solutions particulières d'une EDL pour un second membre polynomial, exponentiel, trigonométrique...			
Résoudre un problème de Cauchy			
Savoir travailler sur une EDL2, en particulier avec la méthode d'abaissement de l'ordre			
Savoir ramener une EDL d'ordre élevé à un système différentiel d'ordre 1			
Résoudre un système linéaire $X' = AX$ en réduisant la matrice A			

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

A Rappels sur les équations différentielles linéaires

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition A1 *Ensemble des solutions – EDL1*

Soit (E) une équation différentielle d'ordre 1. On définit

$$\mathrm{Sol}_{I,\mathbb{K}}(E) = \left\{y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}) / y \text{ est solution de } (E)\right\}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $\mathrm{Sol}_I(E)$, voire même $\mathrm{Sol}(E)$.

Théorème A2 *Forme des solutions – EDL1 homogène*

Soit $a \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. On définit l'équation différentielle

$$y' + a(t)\,y = 0. \tag{E_0}$$

Soit A <u>une</u> primitive de a sur I. Alors l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est

$$\mathrm{Sol}(E) = \left\{t \mapsto Ce^{-A(t)} / C \in \mathbb{K}\right\}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$,

$$y \in \mathrm{Sol}(E) \iff \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = Ce^{-A(t)}.$$

On remarque que $\mathrm{Sol}(E_0)$ est un espace vectoriel de dimension 1. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$.

⚠ Avec des gros guillemets,[1] on pourra retenir :

$$\begin{aligned} y'(t) + a(t)\,y(t) = 0 &\iff \frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t) \iff \ln y(t) = -A(t) + c \iff y(t) = e^{-A(t)+c} \\ &\iff y = Ce^{-A(t)}. \end{aligned}$$

Théorème A3 *Forme des solutions – EDL1*

Soit $a, b \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$. On définit l'équation différentielle

$$y' + a(t)\,y = b(t). \tag{E}$$

Soit A une primitive de a sur I et soit $y_p \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$ une solution particulière de (E) sur I. Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\mathrm{Sol}(E) = \left\{t \mapsto y_p(t) + Ce^{-A(t)} / C \in \mathbb{K}\right\}.$$

Autrement dit, pour tout $y \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$,

$$y \in \mathrm{Sol}(E) \iff \exists C \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = y_p(t) + Ce^{-A(t)}.$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Sol}(E) = \{y_p + y_0 / y_0 \in \mathrm{Sol}(E_0)\},$$

où (E_0) est *l'équation homogène* associée à (E) :

$$y' + a(t)\,y = 0. \tag{E_0}$$

1. Ce serait une démonstration tout à fait valide si on avait des outils nous assurant que y ne s'annule pas sur I.

⚠ Il est important qu'il n'y ait pas de coefficient devant le terme en y'. On dit que l'équation différentielle est sous *forme résolue*.

🔧 Pour déterminer les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non-homogène

$$y' + a(t)\, y = b(t)\,. \tag{E}$$

1. On résout l'équation homogène associée à (E)

$$y' + a(t)\, y = 0. \tag{E_0}$$

2. On détermine une solution particulière de (E) :
   (a) Soit en cherchant une solution particulière de la même forme que le second membre (trigonométrique, exponentiel, polynomial, etc.)
   (b) Si le second membre s'écrit sous la forme $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, on pourra utiliser le *principe de superposition*. Si $y_{p,1}, y_{p,2} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ vérifient

$$y_{p,1}' + a(t)\, y_{p,1} = b_1(t)\,, \quad y_{p,2}' + a(t)\, y_{p,2} = b_2(t)\,,$$

   alors $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ est une solution particulière.
   (c) Soit avec la méthode de *variation de la constante* (nécessite l'étape 1).

Théorème A4 *Théorème de Cauchy*[2]*-Lipschitz*[3]*– EDL1*
Soit $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique application $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall t \in I, y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

La donnée d'une telle équation différentielle et de "conditions initiales" est appelée *problème de Cauchy*.

Exemple A5 :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) - 2y(t) = \cos t - 2, \quad y(0) = 0.$$

♢

2 Équations différentielles sous forme non-résolue

Lorsque (E) n'est pas sous forme résolue, **on ne peut rien** dire sur l'existence ou l'unicité des solutions à un problème de Cauchy, ou sur la structure de l'ensemble des solutions. On peut alors avoir affaire à des problèmes de *raccordement*.

⚠ On ne peut rien dire sur la taille ou la structure de l'ensemble des solutions d'une équation sous forme non-résolue.

🔧 Pour résoudre sur I une équation différentielle sous forme non-résolue du type

$$\alpha(t)\, y' + \beta(t)\, y = \gamma(t)\,, \tag{$\widetilde{E}$}$$

deux cas se présentent :

2. Augustin Cauchy (1789-1857) : Mathématicien français.
3. Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903) : Mathématicien allemand.

- Si α ne s'annule pas sur I, on divise simplement par $\alpha(t)$ et

$$y'' + \underbrace{\frac{\beta(t)}{\alpha(t)}}_{a(t)} y = \underbrace{\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}}_{b(t)} \tag{E}$$

  est bien une équation différentielle sous forme résolue.
- Si α s'annule sur I, on résout (E) sur tous les intervalles où α ne s'annule pas, puis on étudie le recollement des solutions.

Exemple A6 :
On considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$t^2 y' - y = 0. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

◊

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition A7 *Ensemble des solutions – EDL2*
Soit (E) une équation différentielle du deuxième ordre. On définit

$$\mathrm{Sol}_{I,\mathbb{K}}(E) = \left\{ y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) / y \text{ est solution de } (E) \right\}.$$

Lorsque les coefficients sont constants, on peut résoudre directement sur $I = \mathbb{R}$.

Théorème A8 *Forme des solutions – EDL2 homogène à coefficients constants réels*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On définit l'équation différentielle

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0. \tag{E_0}$$

Notons $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant de l'équation caractéristique (E_c) associée à (E_0).

(i) Si $\Delta > 0$, alors (E_c) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et

$$\mathrm{Sol}(E_0) = \left\{ t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors (E_c) admet une racine réelle double r, et

$$\mathrm{Sol}(E_0) = \left\{ t \mapsto C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) Si $\Delta < 0$, alors (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $a + ib$ et $a - ib$, et

$$\mathrm{Sol}(E_0) = \left\{ t \mapsto e^{at} \left(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt) \right) / C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

On rappelle que (E_c) est l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$.

Théorème A9 *Forme des solutions – EDL2 homogène à coefficients constants complexes*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On définit l'équation différentielle

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0. \tag{E_0}$$

Notons $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ le discriminant de l'équation caractéristique (E_c) associée à (E_0).

(i) Si $\Delta \neq 0$, alors (E_c) admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, et

$$\mathrm{Sol}\,(E_0) = \left\{t \mapsto C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} / C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

(ii) Si $\Delta = 0$, alors (E_c) admet une racine complexe double r, et

$$\mathrm{Sol}\,(E_0) = \left\{t \mapsto C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt} / C_1, C_2 \in \mathbb{C}\right\}.$$

On remarque que $\mathrm{Sol}\,(E_0)$ est un espace vectoriel de dimension 2. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Théorème A10 *Forme des solutions – EDL2 à coefficients constants*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et soit $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On définit les équations différentielles

$$y'' + \alpha y' + \beta y = c(t), \tag{E}$$
$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0. \tag{E_0}$$

Soit $y_p \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ une solution de (E). Alors $\mathrm{Sol}\,(E) = \{y_p + y_0 / y_0 \in \mathrm{Sol}\,(E_0)\}$.

⚠ Il n'existe pas de méthode de variation de la constante pour les équations différentielles d'ordre 2. Si l'exercice n'est pas guidé, on cherchera donc des solutions particulière de la même forme que le second membre (trigonométrique, exponentiel, polynomial...). On pourra à nouveau utiliser le principe de superposition.

Théorème A11 *Théorème de Cauchy-Lipschitz – EDL2 à coefficients constants*
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et soit $c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soit $t_0 \in I$ et $y_0, v_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique application $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall t \in I, y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}.$$

Exemple A12 :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y' - 12y = e^{3t}.$$

♢

Exemple A13 :
Soit $\omega > 0$. Déterminer l'unique application f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \omega\sqrt{3}. \tag{E}$$

♢

Exemple A14 :
Déterminer les fonctions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$\diamondsuit$

B Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients non-constants

Dans toute cette partie, on cherche à résoudre sur l'intervalle I l'équation

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t), \tag{E}$$

où a, b, c sont des fonctions continues sur I. L'équation (E) est :

- linéaire ;
- d'ordre 2 ;
- non-homogène ;
- à coefficients non-constants.

Autrement dit, on cherche toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = c(t).$$

On définit l'équation homogène associée

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{E_0}$$

Comme dans le cas de l'ordre 1, lorsqu'on peut écrire (E) sous la forme $y'' = \dots$, c'est-à-dire quand le coefficient devant y'' est 1, on dit que (E) est sous *forme résolue*. On se restreint à ce cadre, mais on pourrait résoudre des équations d'ordre 2 sous forme non-résolue comme pour l'ordre 1 (ce serait juste plus plus long).

1 Généralités

Théorème B1 *Structure de l'ensemble des solutions – EDL2*
Soit $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On définit les équations différentielles

$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = c(t), \tag{E}$$
$$y'' + a(t)\,y' + b(t)\,y = 0. \tag{E_0}$$

Alors

(i) $\mathrm{Sol}(E_0)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. En particulier, si $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ sont deux solutions non-colinéaires de (E), alors

$$\mathrm{Sol}(E_0) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2) = \{C_1 y_1 + C_2 y_2 / C_1, C_2 \in \mathbb{K}\}.$$

(ii) Soit $y_p \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ une solution de (E). Alors $\mathrm{Sol}(E) = \{y_p + y_0 / y_0 \in \mathrm{Sol}(E_0)\}$.

Théorème B2 *Théorème de Cauchy-Lipschitz – EDL2*

Soit $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soit $t_0 \in I$ et $y_0, v_0 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une unique application $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall t \in I, y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) &= c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}.$$

Comme dans le cas où les fonctions a et b sont constantes, pour résoudre (E) :

1. On détermine deux solutions y_1 et y_2 de l'équation homogène (E_0) non-colinéaires.
2. On détermine une solution particulière y_p de l'équation (E).
3. Alors

$$\mathrm{Sol}(E) = \{y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2\}.$$

Remarque B3 (*Ce qui change lorsque les coefficients ne sont pas constants*) : Si les fonctions a et b ne sont pas constantes :

- Il n'existe pas de forme classique pour les solutions de (E_0), c'est-à-dire pas de *base canonique* de $\mathrm{Sol}(E_0)$. Il faudra donc être malin ou se laisser guider par l'énoncé pour trouver y_1 et y_2.
- Il n'existe pas de méthode systématique pour déterminer y_p.

♢

Exemple B4 :
On considère l'équation différentielle suivante sur $I =]0, +\infty[$:

$$y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = 1. \tag{E}$$

1. Vérifier que les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto t \ln t$ sont solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Chercher une solution polynomiale de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(1) = 3$ et $f'(1) = 3$, puis déterminer son expression.

♢

Exemple B5 :
On considère l'équation différentielle suivante sur $I =]0, +\infty[$:

$$y'' - \frac{1}{t}y' - 4t^2 y = 0. \tag{E}$$

1. Soit $y \in \mathcal{C}^1(I)$. On définit $z : t \mapsto y\left(\sqrt{t}\right)$. Justifier que $z \in \mathcal{C}^1(I)$ et que y est solution sur I de (E) si, et seulement si, z est solution sur I de

$$z'' - z = 0. \tag{E'}$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur I.

♢

2 Méthode d'abaissement de l'ordre

Soit $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On souhaite déterminer l'ensemble des solutions de

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t). \tag{E}$$

On suppose qu'on connait une solution y_1 de l'équation homogène (E_0) ne s'annulant pas sur I. Alors on cherche des solutions de (E) sous la forme

$$y(t) = \widetilde{y}(t) \times y_1(t).$$

On obtiendra que y est solution de (E) si, et seulement si, $\widetilde{y}'$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (qu'on espère pouvoir résoudre).

Exemple B6 :
On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ suivante :

$$y'' - \frac{1}{t}y' + \frac{1}{t^2}y = \frac{1}{t}. \tag{E}$$

1. Déterminer une fonction polynomiale satisfaisant l'équation homogène associée à E. On la note y_1.
2. Soit $\widetilde{y} \in \mathcal{C}^2(I)$, et on définit $y : t \mapsto \widetilde{y}(t) \times y_1(t)$. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et déterminer y' et y''.
3. Montrer que y est solution de (E) sur I si $\widetilde{y}'$ est solution sur I de
$$u' + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t^2}. \tag{$\widetilde{E}$}$$
4. Résoudre $\left(\widetilde{E}\right)$ sur I.
5. Montrer que
$$\mathrm{Sol}(E) = \left\{t \mapsto Ct\ln t + Dt + \frac{t\ln^2 t}{2} / C, D \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\diamondsuit$

On remarquera que la méthode d'abaissement de l'ordre est une méthode de variation de la constante généralisée : on recherche le même type de solution. À la fin, on doit par contre résoudre une EDL1, et non plus simplement déterminer une primitive.

Exemple B7 :
Montrer que l'équation différentielle suivante n'admet pas de solutions sur $\mathbb{R}$:

$$t^2y'' - ty' + y = t. \tag{E}$$

Indication : on pourra utiliser l'exemple B6. $\diamondsuit$

C Systèmes différentiels linéaires

Dans cette section, on s'intéresse aux systèmes différentiels d'ordre 1 linéaires à coefficients constants homogènes. Comme d'habitude, dans le cas des coefficients constants, on peut résoudre directement sur $I = \mathbb{R}$.

1 Généralités

Soit $(a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n^2}$. Alors le système différentiel de fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + \dots + a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + \dots + a_{2,n}x_n(t) \\ \dots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + a_{n,2}x_2(t) + \dots + a_{n,n}x_n(t) \end{cases}$$

est équivalent à l'équation différentielle matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = AX(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Théorème C1 *Structure de l'ensemble des solutions – SDL1 homogène*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on définit l'équation différentielle

$$X' = AX. \tag{E_0}$$

Alors l'ensemble des solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n.

Théorème C2 *Théorème de Cauchy-Lipschitz – SDL1*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors il existe une unique application $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}.$$

Exemple C3 :
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$X' = AX.$$

2. Déterminer les fonctions $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle que $X' = AX$ et $X(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$\diamondsuit$

2 Résolution

Pour résoudre le système différentiel $X' = AX$:

1. On réduit la matrice A sous forme diagonale (si possible) ou triangulaire (quitte à passer dans $\mathbb{C}$), de la forme $A = PTP^{-1}$.
2. Alors en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$ on sait résoudre $Y' = TY$.
3. On obtient alors $X(t) = PY(t)$.

Cette méthode **ne nécessite pas** de calculer P^{-1}.

Exemple C4 :
Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et déterminer $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D \in D_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
2. En notant $Y = P^{-1}X$, montrer que X vérifie $X' = AX$ si, et seulement si, Y vérifie $Y' = DY$.
3. Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$.

$\diamondsuit$

Exemple C5 :
On pose $A = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A.

2. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
3. On admet que $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Résoudre le système différentiel linéaire $X' = AX$.

♢

3 Système différentiel linéaire dans le cas diagonalisable

Lemme C6 *Forme des solutions – SDL1 homogène diagonalisable*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ses valeurs propres distinctes. Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ une solution de $X' = AX$. Alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \exists C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x_i(t) = \sum_{k=1}^{p} C_k e^{\lambda_k t}.$$

Définition/Proposition C7 *Stabilité*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres distinctes. Supposons que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \Re\mathrm{e}(\lambda_k) \leq 0.$$

Alors, si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vérifie $X' = AX$, les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ sont bornées.

On dira que 0 est un point *stable* du système $X' = AX$

Définition/Proposition C8 *Stabilité asymptotique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres distinctes. Supposons que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \Re\mathrm{e}(\lambda_k) < 0.$$

Alors, si $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vérifie $X' = AX$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} x_1(t) = 0, \quad \ldots, \quad \lim_{t \to +\infty} x_n(t) = 0.$$

On dira que 0 est un point *asymptotiquement stable* du système $X' = AX$

Définition C9 *Courbe intégrale*

On appelle *courbe intégrale* la courbe représentative de la solution d'une équation différentielle.

- Les courbes intégrales d'une équation différentielle (E) sont les ensembles $\{(t, y(t)) / t \in I\}$ pour toute application $y \in \mathrm{Sol}_I(E)$.
- Les courbes intégrales d'un système différentiel (E) sont les courbes paramétrées $\{(x(t), y(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ pour tout couple d'applications $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathrm{Sol}(E)$.

Exemple C10 :
On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 \\ x_2' = -2x_1 + x_2 \end{cases} . \tag{E}$$

1. Écrire (E) sous la forme matricielle $X' = AX$ et déterminer les valeurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
3. Déduire des questions précédentes le comportement asymptotique des solutions de (E).
4. Montrer que les fonctions $x_1, x_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont solutions du système (E) si, et seulement si, il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = C\cos t + D\sin t \\ x_2(t) = (C + D)\cos t + (D - C)\sin t \end{cases} .$$

5. Tracer les courbes paramétrées

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases} , \quad \begin{cases} x(t) = \cos t + \sin t \\ y(t) = 2\cos t \end{cases} .$$

♢

4 Réécriture d'une équation différentielle linéaire d'ordre plus élevé

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On remarque que l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène et à coefficients constants

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

est équivalente à

$$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}.$$

De manière générale, on peut réécrire toute équation linéaire d'ordre supérieur à 1 homogène et à coefficients constants sous la forme $X' = AX$. On se ramène ainsi à un système différentiel d'ordre 1.

Exemple C11 :
Ecrire l'équation différentielle suivante sous forme d'un système différentiel d'ordre 1 :

$$3y^{(4)} - 2y'' + y' + y = 0.$$

♢

Exemple C12 :
Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$ à la main (c'est-à-dire sans utiliser le théorème A8) :

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{E_0}$$

♢

D Exercices

EXERCICE 10.1

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} = \frac{t}{1+t^2}. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre (E) sur $]-\infty, 0[$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$ty'(t) - y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}. \tag{E'}$$

EXERCICE 10.2

À l'instant $t = 0$, on lâche une balle de masse $m > 0$ du haut d'une falaise de hauteur $h > 0$. On suppose que la force des frottements est proportionnelle à la vitesse, et on notera $k > 0$ le coefficient de frottement. Pour tout $t \geq 0$, on note $y(t)$ l'altitude de la balle à l'instant t.

1. Faire un schéma de la situation et faire le bilan des forces s'exerçant sur la balle.
2. Déterminer une équation différentielle satisfaite par y. Quelles sont les caractéristiques de cette équation ?
3. En déduire l'expression de $y(t)$ pour $t \geq 0$.

EXERCICE 10.3

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$2ty' + y = \frac{1}{t}.$$

2. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$\left(t^2 - 1\right) y' + ty = t^3 - t.$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' + y = \sin^3 t.$$

EXERCICE 10.4

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 2y = e^t \cos(2t).$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = e^t - 3\cos(t).$$

EXERCICE 10.5

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_2 \end{cases}$$

Exercice 10.6

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$y^{(3)} - 2y'' - 5y' + 6y = 0. \tag{E}$$

Exercice 10.7

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y + 2z \\ y' &= 2y + z \\ z' &= y + 2z \end{cases}, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \tag{E}$$

Exercice 10.8

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$ty' - 2y = t^3. \tag{E}$$

1. Peut-on résoudre directement (E) sur $\mathbb{R}$?
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10.9

On définit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}. \tag{E}$$

1. (a) Montrer que A possède deux valeurs propres 1 et -2 dont on déterminera la multiplicité.
   (b) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
   (c) Peut-on conclure quant au comportement asymptotique des solutions de (E) ?
2. Déterminer une base des deux espaces propres de A.
3. Montrer que les fonctions $x_1, x_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont solutions du système (E) si, et seulement si, il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = 2Ce^t - De^{-t} \\ x_2(t) = Ce^t + De^{-t} \end{cases}.$$

4. Déterminer les coefficients C et D correspondant aux conditions initiales suivantes :
   (a) $x_1(0) = -3$ et $x_2(0) = 6$.
   (b) $x_1(0) = -3$ et $x_2(0) = 3$.
   (c) $x_1(0) = -3$ et $x_2(0) = 0$.
5. À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, tracer sur un même schéma les droites d'équations $x - 2y = 0$, $x + y = 0$ et les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 2e^t - 5e^{-t} \\ y(t) = e^t + 5e^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = -3e^{-t} \\ y(t) = 3e^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = -2e^t - e^{-t} \\ y(t) = -e^t + e^{-t} \end{cases}, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Exercice 10.10

La tension u du condensateur d'un circuit RLC est une fonction du temps vérifiant l'équation différentielle

$$LCu'' + RCu' + u = E,$$

où R, L, C et E sont des paramètres positifs du modèle.

1. Déterminer une solution particulière u_p de cette équation.
2. On donne $R = 10\ \Omega$, $L = 100\ mH$, $C = 5\ \mu F$ et $E = 12\ V$. Déterminer l'expression générale des solutions de l'équation différentielle.
3. Déterminer l'expression de $u(t)$ sachant que $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$, puis, à l'aide d'une calculatrice, tracer $u(t)$ pour $t \in [0; 0,05]$.

Exercice 10.11

Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante sur $]-1, 1[$:

$$\left(1 - t^2\right) y'' - ty' + y = 0.$$

On pourra considérer la fonction $z : x \mapsto y(\cos x)$.

Exercice 10.12

Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x). \tag{$\star$}$$

Indication : On pourra raisonner par analyse/synthèse et dériver l'égalité ($\star$).

Exercice 10.13

On considère l'équation différentielle sur $I =]-1, +\infty[$:

$$(1 + t) y'' - 2y' + (1 - t) y = te^t. \tag{E}$$

1. Trouver une solution particulière y_1 de l'équation homogène associée à (E) de la forme $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Avec la méthode d'abaissement de l'ordre, résoudre l'équation différentielle (E) sur I.

Exercice 10.14

On considère l'équation différentielle

$$t^2 y'' + ty' + y = 0. \tag{E}$$

1. Soit $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on pose, pour tout $t > 0$, $y(t) = z(\ln t)$. Montrer que y est solution sur $]0, +\infty[$ de (E) si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$z'' + z = 0.$$

2. Résoudre (E).
3. Déterminer l'unique solution y de (E) vérifiant

$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Exercice 10.15

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)\, dt. \tag{$\star$}$$

Exercice 10.16

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\left(1 + e^t\right) y'' + 2e^t y' + \left(2e^t + 1\right) y = e^t. \tag{E}$$

1. Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. On pose $z : t \mapsto \left(1 + e^t\right) y(t)$. Montrer que $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.
2. Résoudre cette équation linéaire puis résoudre (E).

Troisième partie

Chapitres spécialisés

CHAPITRE XI

SÉRIES ENTIÈRES

> *On the whole, Divergent series are the work of the Devil and it is a Shame that one dares base any Demonstration on them. You can get whatever result you want when you use them, and they have given rise to so many Disasters and so many Paradoxes.*
>
> Niels Henrik Abel

Pré-requis :

- Séries numériques
- Équations différentielles

	☹	😐	☺
Savoir calculer un rayon de convergence			
Connaître les développements en série entière usuels			
Savoir déterminer le DSE d'une fonction simple			
Savoir appliquer les théorèmes de dérivation et de primitivation terme à terme aux calculs de DSE et aux EDL			
Rechercher des solutions d'EDL développables en série entière			

A Généralités

1 Notion de série entière

Définition A1 *Série entière*

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle *série entière* associée l'objet $\sum_n a_n X^n$. L'ensemble

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} / \sum_n a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

est appelé *domaine de convergence* de la série entière.

⚠ Les séries entières généralisent la notion de polynôme (plus précisément, les sommes partielles d'une série entière sont des polynômes). Il convient simplement de remarquer que la fonction polynomiale associée au polynôme est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, alors que la "fonction somme" associée à la série entière sera définie uniquement sur le domaine de convergence D.

⚠ On a toujours $0 \in D$.

Exemple A2 :
Montrer que le domaine de convergence de la série entière $\sum_n \frac{X^n}{n!}$ est $\mathbb{C}$. ♢

2 Rayon de convergence

Lemme A3 *Lemme d'Abel*[1]
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

🔧 La suite complexe $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, la suite réelle $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Définition A4 *Rayon de convergence*
On définit le *rayon de convergence* de la série entière $\sum_n a_n X^n$ par

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 / \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Théorème A5 *Théorème du rayon de convergence*
Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n X^n$ soit strictement positif. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

(i) si $|z| < R$ alors la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
(ii) si $|z| > R$ alors la série $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement.

Si $|z| = R$, alors on ne peut pas conclure directement.

Exemple A6 :

1. Déterminer la valeur de R, le rayon de convergence de la série entière $\sum_n X^n$.
2. Si $R < +\infty$, étudier la convergence de la série $\sum_n z^n$ lorsque $|z| = R$.

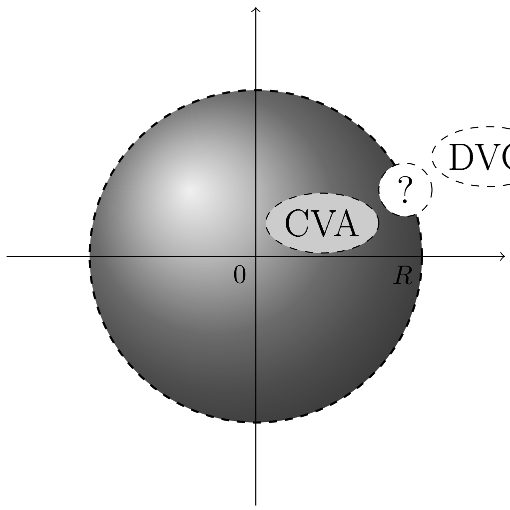
1. Niels Henrik Abel (1802-1829) : Mathématicien norvégien.

$\diamondsuit$

Remarque A7 : Le théorème A5 donne l'allure du domaine D de convergence de la série entière $\sum\limits_n a_n X^n$.
Notons R son rayon de convergence. Trois cas se présentent :

- Si $R = 0$, alors $D = \{0\}$.
- Si $R = +\infty$, alors $D = \mathbb{C}$.
- Si $R \in]0, +\infty[$, alors

$$\{z \in \mathbb{C}/|z| < R\} \subseteq D \subseteq \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq R\}.$$



On parle de *disque ouvert de convergence* et de *cercle d'incertitude*. En effet, sur le cercle d'incertitude (c'est-à-dire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$), tout peut se passer : convergence absolue, semi-convergence, divergence, divergence grossière... $\diamondsuit$

⚠ Le disque ouvert de convergence est **inclus** dans le domaine de convergence (a priori, ils ne sont pas égaux).

Exemple A8 :

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n \dfrac{X^n}{n^2}$.
2. Étudier la convergence de la série entière $\sum\limits_n \dfrac{X^n}{n^2}$ au bord du disque de convergence.

$\diamondsuit$

Corollaire A9

Soit $\sum\limits_n a_n X^n$ une série entière. Notons R son rayon de convergence. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

(i) Si $\sum\limits_n a_n z_0^n$ converge, alors $|z_0| \leq R$.

(ii) Si $\sum\limits_n a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.

Exemple A10 :

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{X^n}{4^n n}$. ♢

🔧 Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n X^n$, on cherchera principalement à appliquer le critère de D'Alembert à la série numérique $\sum_n |a_n z^n|$ pour $z \in \mathbb{C}^*$. Si l'on est capable de calculer la limite, le cas d'incertitude du critère correspond au bord du disque de convergence.

3 Comparaison des rayons de convergence des séries entières

Théorème A11 *Comparaison des séries entières*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq |b_n|,$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n X^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum_n b_n X^n$.

⚠ L'ordre entre les termes généraux et les rayons de convergence est inversé : la plus "grosse" série converge moins souvent.

Exemple A12 :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{X^n}{2n! \ln n}$. ♢

Théorème A13 *Équivalence des séries entières*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors si

$$|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|,$$

alors les rayon de convergence des séries entières $\sum_n a_n X^n$ et $\sum_n b_n X^n$ sont égaux.

Exemple A14 :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{n}\right)} - e^{i\left(n-\frac{1}{n}\right)}}{2i} z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$. ♢

Théorème A15
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors les rayon de convergence des séries entières $\sum_n a_n X^n$, $\sum_n |a_n| X^n$, $\sum_n \lambda a_n X^n$, $\sum_n n a_n X^n$ et $\sum_n \frac{a_n}{n} X^n$ sont égaux.

⚠ Pour développer l'intuition des rayons de convergence, on retiendra qu'en général, multiplier ou diviser (a_n) par un polynôme ne change pas le rayon de convergence.

B Fonction somme

1 Définition

Dans toute la suite du chapitre, on se restreindra aux variables réelles. On considère la série entière $\sum_n a_n X^n$, dont on note R le rayon de convergence. On ne parle plus de disque de convergence, mais plutôt d'*intervalle (ouvert) de convergence* :

$$\begin{cases} \emptyset & \text{si } R = 0 \\ ]-R, R[& \text{si } R > 0 \end{cases}$$

La **variable** est réelle, mais si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, la série entière peut être **à valeurs** complexes.

Définition B1 *Fonction somme*

On appelle *fonction somme* associée à la série entière $\sum_n a_n X^n$ la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

Son ensemble de définition est

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sum_n a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

On remarquera naturellement que l'intervalle ouvert de convergence est inclus dans D_f, mais pas forcément égal. Si $R \in]0, +\infty[$, alors on peut avoir

$$D_f =]-R, R[\text{ ou } [-R, R[\text{ ou }]-R, R] \text{ ou } [-R, R].$$

La fonction f existe toujours, la question est simplement "quel est son domaine de définition ?"

Exemple B2 :
Déterminer les rayons de convergence et les ensembles de définitions des fonctions sommes associés aux séries entières suivantes :

$$\sum_n X^n, \quad \sum_n \frac{X^n}{n}, \quad \sum_n \frac{X^n}{n^2}.$$

$\diamondsuit$

2 Régularité

Dans cette partie, on considère la série entière $\sum_n a_n X^n$, et on note R le rayon de convergence et f la fonction somme associés.

On suppose toujours que $R > 0$.

Théorème B3 *Dérivation terme à terme*

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-R,R[$. En particulier, f est dérivable sur $]-R,R[$ et, pour tout $x \in\,]-R,R[$,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

On pourra dériver terme à terme plusieurs fois sans problèmes. Par exemple

$$\forall x \in\,]-R,R[,\quad f''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

⚠ On ne peut rien dire dans le cas général concernant les bornes de l'intervalle $]-R,R[$.

Exemple B4 :

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ pour tout $x \in\,]-1,1[$. ♢

Théorème B5 *Primitivation terme à terme*

Soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x \in\,]-R,R[$,

$$F(x)=F(0)+\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

⚠ Ne pas oublier la constante d'intégration $F(0)$!

Exemple B6 :

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in\,]-1,1[$. ♢

Corollaire B7 *Intégration terme à terme*

Pour tous $\alpha, \beta \in]-R,R[$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

C Développement en série entière

Dans la suite, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Fonction développable en série entière

Définition/Proposition C1 *Développement en série entière*

Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{F}(]-r, r[, \mathbb{K})$. On dit que f est *développable en série entière* sur $]-r, r[$ si il existe $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Exemple C2 :
Les fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques (circulaires et hyperboliques) sont développables en série entière. $\diamondsuit$

Théorème C3

Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{F}(]-r, r[, \mathbb{K})$. Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors

(i) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$

(ii) si on note $\sum_n a_n X^n$ la série entière associée à f, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque C4 : Il y a évidemment un lien important avec la série $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, appelée *série entière de Taylor associée à f*, et donc avec les formules de Taylor : pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, alors pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}_{S_N} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt}_{R_N}.$$

Le problème du développement en série entière revient donc à l'étude de la convergence $\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$. $\diamondsuit$

⚠ Il ne faut surtout pas confondre développement limité et développement en série entière.

Corollaire C5

Soit $r > 0$ et $f \in \mathcal{F}(]-r, r[, \mathbb{K})$. Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors ce développement est unique.

⚠ Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière.

2 Développements en série entière usuels

Théorème C6 *Développements en série entière usuels*

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}, x \mapsto \ln(1+x), x \mapsto (1+x)^\alpha$, exp, cos et sin sont développables en série entière et on a le tableau suivant :

Développement en série entière	Intervalle de convergence	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$]-1,1[$	$R=1$
$\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$]-1,1[$	$R=1$
$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$	$[-1,1[$	$R=1$
$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$]-1,1]$	$R=1$
$(1-x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$]-1,1]$	$R=1$
$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$	$R=+\infty$
$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\mathbb{R}$	$R=+\infty$
$\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$	$R=+\infty$

⚠ Aussi élégant que soit le théorème C3, ce n'est pas lui qu'on utilise en pratique pour déterminer le développement en série entière d'une fonction [2], mais bien les développements usuels (comme pour les développements limités).

Exemple C7 :
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$.

1. Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0, et déterminer son développement en série entière.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

$\diamondsuit$

Exemple C8 :

1. Justifier que la fonction arctan est développable en série entière au voisinage de 0, et déterminer son développement en série entière.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière obtenue.

$\diamondsuit$

2. À l'exception de la fonction exponentielle. On s'amusera pas à dériver n fois une fonction quelconque.

3 Application aux équations différentielles

Le théorème de dérivation terme à terme des séries entières permet de ramener une équation différentielle à une suite définie par une relation de récurrence.

🔧 Pour déterminer les solutions d'une équation différentielle (E) développables en série entière, on raisonne par analyse/synthèse :

1. Dans l'analyse, on suppose qu'une telle solution existe sous la forme
$$\forall t \ \in]-r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$
Le but de l'analyse est de trouver l'expression de (a_n) et la valeur de r.
   (a) À l'aide du théorème de dérivation terme à terme et de l'équation différentielle satisfaire par f, on trouve une relation de récurrence satisfaite par la suite (a_n).
   (b) On étudie le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ qui nous donne la valeur de r.
   (c) Éventuellement, on exprime $f(t)$ à l'aide des fonctions usuelles (si l'on sait calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$).
2. Dans la synthèse, on vérifie que la (ou les) fonction f obtenue dans l'analyse est bien solution de (E), soit sous forme de série entière, soit en l'exprimant à l'aide des fonctions usuelles.

Exemple C9 :
On considère l'équation différentielle
$$y' = 2y. \tag{E}$$
Sans utiliser le théorème donnant la forme des solutions de (E), déterminer les solutions de (E) développables en série entière. ♢

Exemple C10 :
On considère l'équation différentielle
$$t^2 y'' + 4ty' + \left(2 - t^2\right) y = 1. \tag{E}$$
1. Montrer que (E) possède une unique solution f développable en série entière, dont on déterminera le rayon de convergence.
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
Indication : On pourra calculer la quantité $e^t + e^{-t}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

♢

D Exercices

Exercice 11.1
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_n \frac{n^2}{3^n} X^n, \quad \sum_n \binom{2n}{n} X^{4n}, \quad \sum_n \left(n^2 + in\right) X^n, \quad \sum_n e^{-n^2} X^n.$$

Exercice 11.2
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum_n n! X^n, \quad \sum_n \frac{n+i}{2+in} X^n, \quad \sum_n \frac{\ln n}{n^2} X^n, \quad \sum_n \frac{n^n}{n!} X^{3n}.$$

Exercice 11.3

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_n \frac{(1+i)^n X^{3n}}{n2^n}, \quad \sum_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} X^n, \quad \sum_n X^{n^2}, \quad \sum_n X^{n!}.$$

Exercice 11.4

Soit $a > 0$. Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes, et préciser leur rayon de convergence :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{a+x}, \quad f_2 : x \mapsto e^{a+x}, \quad f_3 : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}, \quad f_4 : x \mapsto e^x \cos x.$$

Exercice 11.5

Soit $a > 0$. Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes, et préciser leur rayon de convergence :

$$f_1 : x \mapsto \ln(a-x), \quad f_2 : x \mapsto a^x, \quad f_3 : x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right).$$

Exercice 11.6

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note R_a, R_b et R_{a+b} les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum_n a_n X^n$, $\sum_n b_n X^n$ et $\sum_n (a_n + b_n) X^n$

1. On suppose que $R_a = R_b$.
   (a) Montrer que $R_{a+b} \geq R_a$.
   (b) Donner un exemple où cette inégalité est une égalité, et un exemple où l'inégalité est stricte.
2. On suppose que $R_a \neq R_b$. Montrer que $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Exercice 11.7

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_n e^{-n^2} X^n, \quad \sum_n n \sin(n) X^n, \quad \sum_n \frac{e^{in}}{1+in} X^n, \quad \sum_n \tan\left(\frac{n\pi}{3}\right) X^n.$$

Exercice 11.8

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n n^{(-1)^n} X^n$.

Indication : on pourra encadrer le terme $n^{(-1)^n}$.

Exercice 11.9

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$
en en déduire la valeur de $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)$.
2. Déduire de la question précédente le développement en série entière de la fonction arcsin et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 11.11

Déterminer le rayon de convergence et donner la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_n \left(n^2 + n + 1\right) X^n$.
2. $\sum_n \frac{n+2}{n+1} X^n$.
3. $\sum_n \frac{X^n}{n^2+n}$.

Exercice 11.12

Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit la fonction à valeurs réelles :
$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n \binom{n+p}{p} X^n$.
2. Montrer que f est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle
$$(1-x)\, y' - (p+1)\, y = 0. \tag{E}$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 11.13

On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit la fonction à valeurs réelles :
$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n \frac{X^{3n}}{(3n)!}$.
2. Soit $x \in]-R, R[$. Après avoir remarqué que
$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!},$$
calculer e^{jx} et e^{j^2x}.

3. En déduire que

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad f(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2e^{-x/2}}{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right).$$

Exercice 11.14

On définit la fonction à valeurs réelles :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} X^{2n+1}$.
2. Montrer que f est solution sur $\left]-R, R\right[$ de l'équation différentielle

$$\left(1 - x^2\right) y' - xy = 1. \tag{E}$$

3. Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

CHAPITRE XII

ISOMÉTRIES ET MATRICES ORTHOGONALES

> *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.*
>
> Euclide

Pré-requis :

- Réduction
- Produit scalaire
- Géométrie du plan et de l'espace

	☹	😐	☺
Montrer qu'une matrice est orthogonale ou qu'une application est une isométrie			
Savoir manipuler des matrices orthogonales ou symétriques			
Connaître et utiliser les différentes caractérisations des isométries			
Déterminer l'orientation d'une symétrie ou d'une matrice orthogonale			
Déterminer les éléments caractéristiques d'une isométrie du plan			
Déterminer les éléments caractéristiques d'une isométrie de l'espace			

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace euclidien, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle qu'on définit la norme et la distance associées par

$$\forall x, y \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad d(x, y) = \|y - x\|.$$

Théorème 1

Soit B une base orthonormée de E. Pour tous $x, y \in E$, notons

$$X = \mathrm{mat}_B(x), \quad Y = \mathrm{mat}_B(y).$$

Alors

$$\langle x, y \rangle = X^\intercal Y, \quad \|x\| = \sqrt{X^\intercal X}.$$

A Matrices orthogonales

1 Ensemble des matrices orthogonales

Définition A1 *Matrice orthogonale*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une *matrice orthogonale* si $A^\intercal A = I_n$. On note l'ensemble des matrices orthogonales

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A^\intercal A = I_n\}.$$

On note parfois $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exemple A2 :
Montrer que la matrice $M = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ est orthogonale et calculer M^{-1}. ♢

Proposition A3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, A est inversible et $A^{-1} = A^\intercal$.

⚠ Si A est orthogonale, on n'a pas de calculs à faire pour déterminer A^{-1}.

Proposition A4
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff A^\intercal \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition A5
Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème A6 *Caractérisations des matrices orthogonales*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est une matrice orthogonale.
(ii) Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire canonique).
(iii) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (muni de son produit scalaire canonique).
(iv) A est la matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un même espace euclidien E.

2 Déterminant et spectre

Théorème A7 *Déterminant*
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \pm 1$.

⚠ La réciproque est fausse ! En effet

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}.$$

<u>Théorème A8</u> *Valeurs propres réelles*
Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une valeur propre <u>réelle</u> de A, alors $\lambda = \pm 1$.

⚠ Si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$. A peut néanmoins avoir des valeurs propres complexes (voire même aucune valeur propre réelle).

Exemple A9 :
Vérifier que les matrices suivantes sont orthogonales, et déterminer leur spectre :

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

♢

3 Cas des matrices symétriques

<u>Lemme A10</u>
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors les espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux (pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

<u>Théorème A11</u> *Théorème spectral*
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

(i) Toutes les valeurs propres de A sont réelles.
(ii) A est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\intercal}.$$

Exemple A12 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^{\intercal} M X \geq 0.$$

1. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et que ses valeurs propres sont positives.
2. Montrer qu'il existe $N \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

♢

B Isométries d'un espace euclidien

1 Définition et caractérisations

Définition B1 *Isométrie*
Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est *une isométrie (vectorielle)* si f conserve la norme, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathcal{O}(E)$.

On traite ici des isométries vectorielle par opposition aux translations (du plan ou de l'espace), qui conservent les distances, mais s'appliquent à des points, et pas à des vecteurs. Dans la suite, on parlera simplement d'isométrie.

Exemple B2 :
Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme $\lambda \operatorname{Id}_E$ est-il une isométrie ? ♢

Exemple B3 :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la rotation d'angle θ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$. ♢

Théorème B4 *Caractérisation des isométries par conservation du produit scalaire*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$f \text{est une isométrie de } E \iff \forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Exemple B5 :
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \text{est une isométrie de } E \iff \forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

♢

Théorème B6 *Caractérisation des isométries par conservation des bases orthonormées*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie de E.
(ii) L'image de toute base orthonormée par f est une base orthonormée.
(iii) L'image d'une base orthonormée par f est une base orthonormée.

2 Liens avec les matrices orthogonales

Théorème B7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une isométrie.
(ii) La matrice de f dans toute base orthonormée de E est orthogonale.
(iii) La matrice de f dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Les matrices orthogonales sont donc l'équivalent matriciel des isométries vectorielles. On devra donc savoir passer d'une interprétation à l'autre pour résoudre les exercices.

Proposition B8

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors f est bijective et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Proposition B9

Soit $f, g \in \mathcal{O}(E)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{O}(E)$.

Proposition B10

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une isométrie et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors

(i) $F^{\perp}$ est aussi stable par f.
(ii) f induit des isométries sur F et $F^{\perp}$, notées respectivement $f_{\| F}$ et $f_{\| F^{\perp}}$.

C Classification en dimension 2 et 3

1 Orientation

Définition C1 *Isométrie directe*

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$ une isométrie de E. Alors $\det(f) = \pm 1$. Si $\det(f) = 1$, on dit que f est une *isométrie directe*. Dans le cas contraire, on dit que f est une *isométrie indirecte*.

On appelle *groupe spécial orthogonal* l'ensemble des isométries directes de E, qu'on note $\mathrm{SO}(E)$.

On emploie le même vocabulaire pour les matrices orthogonales directes et indirectes, et on note

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det A = 1\}.$$

Exemple C2 :
Donner un exemple de matrice orthogonale directe, et un exemple de matrice orthogonale indirecte. ♢

Définition C3 *Espace euclidien orienté et base directe*

Un espace euclidien *orienté* est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée B. Une base B' de E est dite *directe* si $\mathrm{Pass}(B, B')$ est une matrice orthogonale directe. Dans le cas contraire, B' est dite indirecte.

Autrement dit, l'orientation d'un espace dépend du choix d'une base de référence au départ. L'espace $\mathbb{R}^n$ est toujours orienté en fixant la base canonique. Notamment, dans $\mathbb{R}^3$, on peut alors déterminer les bases directes en utilisant la "règle de la main droite".

Exemple C4 :
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Déterminer deux bases directes et deux bases indirectes de $\mathbb{R}^3$. ♢

2 Classification des isométries du plan

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Théorème C5 *Classification de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$*

(i) Une matrice 2×2 est orthogonale directe si, et seulement si, elle est de la forme $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Autrement dit

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Une matrice 2×2 est orthogonale indirecte si, et seulement si, elle est de la forme $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Autrement dit

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Théorème C6 *Classification des isométries du plan*

Les isométries du plan sont exactement les rotations et les réflexions. Plus précisément, pour tout isométrie f de $\mathbb{R}^2$,

(i) Si f est une isométrie directe, alors f est une rotation, et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de f dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ est

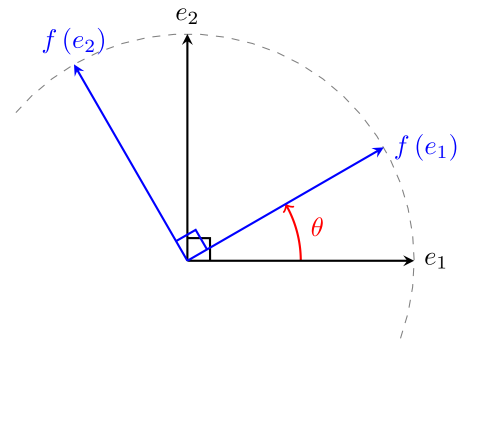
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(ii) Si f est une isométrie indirecte, alors f est une symétrie orthogonale par rapport à une droite, et il existe une base orthonormée directe B de $\mathbb{R}^2$, telle que

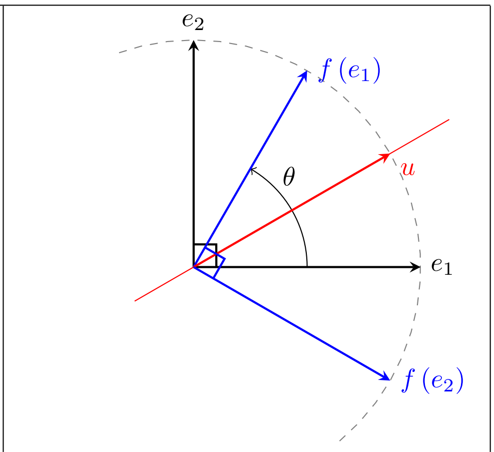
$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En particulier,

- Id est une isométrie directe, c'est la rotation d'angle 0.
- $-\,$Id est une isométrie directe, c'est la rotation d'angle π.



Rotation
d'angle θ



Symétrie orthogonale
par rapport à $\mathrm{Vect}(u)$

Pour étudier une isométrie f de $\mathbb{R}^2$ (canoniquement associée à A) :

1. On commence par vérifier que f est une isométrie (par exemple en vérifiant que $A^\intercal A = I_2$).
2. On détermine si f est une isométrie directe ou indirecte en calculant son déterminant.
3. Étude des éléments caractéristiques :
   (a) Si f est une isométrie directe, alors f est une rotation. Ainsi $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. f est donc la **rotation d'angle** θ.
   (b) Si f est une isométrie indirecte, alors f est une réflexion. On détermine
   $$E_1(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / f(x) = x\right\} = \mathrm{Vect}(u).$$
   f est donc la **réflexion par rapport à** $\mathrm{Vect}(u)$.

Exemple C7 :
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

◇

Exemple C8 :
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2)$.

1. Justifier qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ vérifiant
$$f(1,1) = \frac{1}{5}(7,1), \quad f(0,1) = \frac{1}{5}(3,4).$$
2. Montrer que f est une isométrie, puis déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

◇

3 Classification des isométries de l'espace

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Théorème C9 *Classification des isométries de l'espace*

Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^3$, alors

(i) Si f est une isométrie directe, alors f est une rotation, et il existe une base orthonormée directe B de $\mathbb{R}^3$, telle que

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(ii) Si f est une isométrie indirecte, alors f est la composée d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathrm{Vect}\, u)^\perp$, et il existe une base orthonormée directe B de $\mathbb{R}^3$, telle que

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{rotation}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{réflexion}}.$$

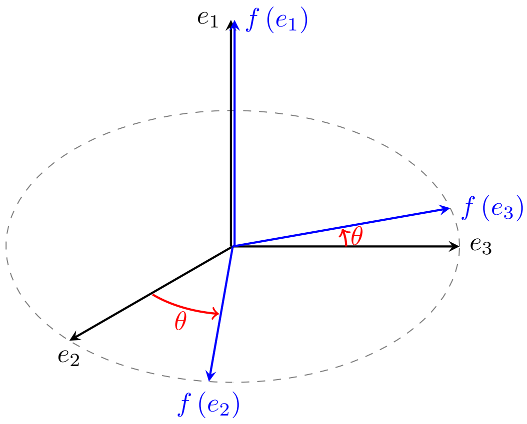
En particulier,

- Id est une isométrie directe, c'est la rotation d'angle 0 et d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$.
- $-\mathrm{Id}$ est une isométrie indirecte, c'est la composée de la rotation d'angle θ d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$, et de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathrm{Vect}(u)$ est isométrie directe, c'est une rotation d'angle π et d'axe $\mathrm{Vect}(u)$.

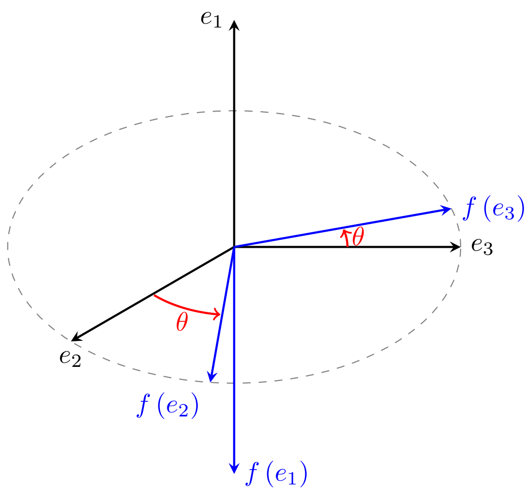
Remarque C10 : On remarquera que

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{réflexion}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{rotation}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{rotation}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{réflexion}}.$$

Autrement dit, la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et la symétrie orthogonale par rapport au plan $(\mathrm{Vect}\, u)^\perp$ commutent (on peut donc parler de composition, sans préciser l'ordre dans lequel on effectue cette composition). $\diamondsuit$



Rotation
d'axe $\text{Vect}(e_1)$ et d'angle θ



Rotation
d'axe $\text{Vect}(e_1)$ et d'angle θ
composée avec
symétrie orthogonale
par rapport à $\text{Vect}(e_1)^{\perp}$

🔧 Pour étudier une isométrie f de $\mathbb{R}^3$ (canoniquement associée à A) :

1. On commence par vérifier que f est une isométrie (par exemple en vérifiant que $A^{\intercal}A = I_3$).
2. On détermine si f est une isométrie directe ou indirecte en calculant son déterminant ou en cherchant si $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$.
3. Étude des éléments caractéristiques :
   (a) Si f est une isométrie directe, alors f est une rotation.
      i. Pour déterminer l'axe, on détermine

      $$E_1(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = x\right\} = \text{Vect}(u).$$

      ii. Pour déterminer l'angle, on détermine $\cos\theta$ avec la formule $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$, et $\sin\theta$ est du même signe que $\det_{\text{can}}(u, x, f(x))$ pour tout $x \notin \text{Vect}(u)$.

   f est donc la **rotation d'axe** $\text{Vect}(u)$ **et d'angle** θ.

   (b) Si f est une isométrie indirecte, alors f est la composée d'une rotation et d'une réflexion.
      i. Pour déterminer l'axe, on détermine

      $$E_{-1}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = -x\right\} = \text{Vect}(u).$$

      ii. Pour déterminer l'angle, on détermine $\cos\theta$ avec la formule $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta - 1$, et $\sin\theta$ est du même signe que $\det_{\text{can}}(u, x, f(x))$ pour tout $x \notin \text{Vect}(u)$.

   f est donc la composée de la **rotation d'axe** $\text{Vect}(u)$ **d'angle** θ et de la **symétrie orthogonale par rapport à** $\text{Vect}(u)^{\perp}$.

Exemple C11 :
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des isométries de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices

$$A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 8 & -1 & -4 \\ -4 & -4 & -7 \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 12.1

Déterminer la nature et préciser les éléments caractéristiques des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

Exercice 12.2

La matrice $A = \begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$ est elle diagonalisable ? Quelle remarque peut-on faire ?

Exercice 12.3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z).$$

1. Justifier sans calculs qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
2. Déterminer une telle base.

Exercice 12.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^\intercal A = S^2.$$

1. Montrer que S est inversible, déterminer S^{-1} et justifier que S^{-1} est symétrique.
2. Montrer que AS^{-1} est une matrice orthogonale.

Exercice 12.5

On considère le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Vérifier que $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sont unitaires.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de l'unique rotation de $\mathbb{R}^2$ envoyant u sur v.
3. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12.6

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ des isométries suivantes.

1. La rotation d'angle $\theta = \arccos(-1/3)$.
2. La symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}((1,2))$.

Exercice 12.7

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice non-nulle et $A = XX^\intercal$.

1. Déterminer la taille de A et justifier que A est diagonalisable.
2. Calculer le rang de A.
3. En déduire que A possède deux valeurs propres distinctes, que l'on déterminera ainsi que leur multiplicité.

Exercice 12.8

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et d'axe dirigé par $u = (1, 1, 1)$.

Exercice 12.9

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie, puis donner sa nature et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer A^{481}.

Exercice 12.10

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Justifier que f est une isométrie.
2. f est-elle une isométrie directe ou indirecte ?
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f.

Exercice 12.11

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion orthogonale par rapport au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y - z = 0$.

Exercice 12.12

On considère un espace euclidien E de dimension 4 orienté par une base orthonormée $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f l'endomorphisme de E tel que

$$A = \mathrm{mat}_B\,(f) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $f \in SO\,(E)$.
2. Soit $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, f\,(e_1))$. Montrer que F est stable par f. Que peut-on dire de $F^\perp$?
3. Montrer que $(e_1, f\,(e_1))$ est une base orthonormée de F et que $f_{\|F}$ est une rotation vectorielle.
4. Justifier que $e_4 \in F^\perp$. En déduire que $F^\perp = \mathrm{Vect}\,(e_4, f\,(e_4))$.
5. Construire une base orthonormée (e_4, e_4') de $F^\perp$.
6. Justifier que $(e_1, f\,(e_1)\,, e_4, e_4')$ est une base orthonormée de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 12.13

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E et $x_0 \in E$ tel que $f\,(x_0) \neq x_0$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, les vecteurs $x + f\,(x)$ et $x - f\,(x)$ sont orthogonaux.
2. On note $H = \{x \in E / \|x_0 - x\| = \|f\,(x_0) - x\|\}$. Montrer que H est un hyperplan de E.
3. On note s la symétrie orthogonale par rapport à H. Montrer que $s\,(x_0) = f\,(x_0)$.

Exercice 12.14

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E.

1. (a) Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$.
   (b) Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)^{\perp}$.
2. En déduire que si $(f - \mathrm{Id}_E)^2 = 0$ alors $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 12.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices diagonales possédant des 1 ou des -1 sur la diagonale.
2. En déduire que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Indication : on pourra commencer à réfléchir pour de petites valeurs de n.

Exercice 12.16

1. Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont entiers. Combien existe-t-il de matrices de ce type ?
2. Déterminer les matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls. Combien existe-t-il de matrices de ce type ?

CHAPITRE XIII

SÉRIES DE FOURIER

> *Et ignem regunt numeri.*
>
> Joseph Fourier

Pré-requis :

- Séries numériques
- Trigonométrie
- Intégration
- Produit scalaire

	☹	😐	☺
Calculer les coefficients de Fourier d'une fonction périodique			
Utiliser le théorème de Parseval pour calculer une somme infinie			
Utiliser le théorème de Dirichlet pour calculer une somme infinie			
Utiliser le théorème de Dirichlet pour calculer une somme infinie			

A Somme partielle et coefficients de Fourier

1 Notion de continuité par morceaux

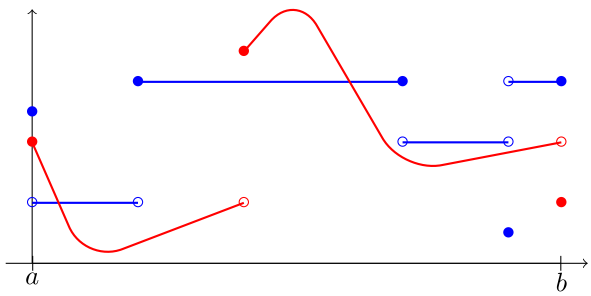
Définition A1 *Continuité par morceaux*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$. On dit que f est *continue par morceaux sur* $[a,b]$ (resp. $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si il existe $a_0, \ldots, a_n \in [a,b]$ tels que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

et tels que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f se prolonge en une fonction continue (resp. $\mathcal{C}^1$) sur $[a_{k-1}, a_k]$ et f admet une limite à droite en a_{k-1} et une limite à gauche en a_k. On note $\mathcal{C}^0_m([a,b], \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1_m([a,b], \mathbb{R})$) les fonctions continues par morceaux (resp. $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $[a,b]$.

La famille $(a_0, \ldots, a_n)$ est appelée *subdivision du segment* $[a, b]$ *adaptée à* f. Il suffit de vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $]a_{k-1}, a_k[$ et que f admet des limites finies à droite en a_{k-1} et à gauche en a_k. Pour la classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, il faut de plus que f' admette des limites finies à droite en a_{k-1} et à gauche en a_k.



Exemple A2 :
Les fonctions $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ sont continues par morceaux sur $[-3, 3]$. ♢

Proposition A3

Les ensembles $\mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1_m([a, b], \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

On remarque qu'une fonction continue est continue par morceaux, et qu'une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux est continue par morceaux.

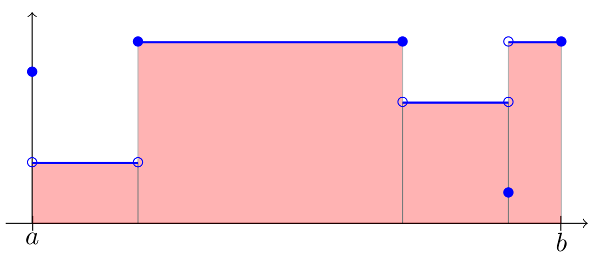
⚠ Même si cela n'est pas particulièrement difficile, on n'a pas défini des fonctions continues par morceaux sur un intervalle, et on ne parlera pas d'intégrale généralisée dans le chapitre actuel. On travaille exclusivement sur des segments.

Définition A4 *Intégrale d'une fonction continue par morceaux*

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{R})$ et $a_0, \ldots, a_n$ une subdivision adaptée à f. Alors on définit *l'intégrale de Riemann*[1] *de* f *sur* $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(t)\, dt.$$

Les intégrales ainsi définies sont des intégrales généralisées, mais d'une fonction prolongeable par continuité, donc convergentes.



⚠ La valeur de l'intégrale ainsi définie ne dépend pas de la subdivision choisie.

1. Bernhard Riemann (1826-1866) : Mathématicien allemand.

Remarque A5 : L'intégrale de Riemann étendue aux fonctions continues par morceaux vérifie toutes les propriétés de l'intégrale des fonctions continues (Chasles, linéarité, positivité, monotonie, etc.) En revanche, une propriété n'est plus vraie. Si $f \in \mathcal{C}_m^0([a,b])$ est de signe constant et d'intégrale nulle, alors f n'est pas forcément nulle.[2] Contre-exemple ? ♢

On rappelle que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique si, et seulement si,

$$\forall x \in D_f, \quad \begin{cases} x + T \in D_f, \\ f(x+T) = f(x). \end{cases}$$

La période T n'est pas unique.

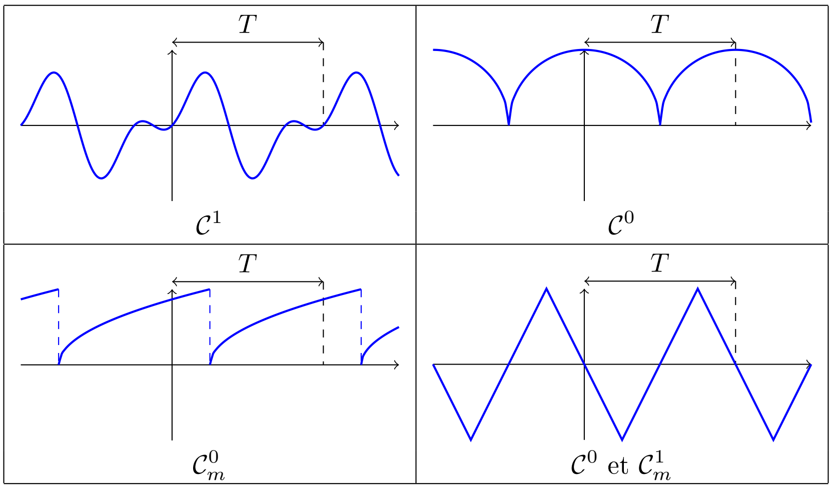
Définition A6 *Fonction périodique et continue par morceaux*

Soit $T > 0$. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que f est *T-périodique et continue morceaux* (resp. $\mathcal{C}^1$ par morceaux) si, et seulement si, f est continue (resp. $\mathcal{C}^1$) par morceaux sur une période (par exemple sur $[0,T]$).

Proposition A7

Pour tout $T > 0$, les ensembles $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{m,T}^0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_{m,T}^1(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Il s'agit de la classe de fonctions qui nous intéresse, et qui permet de modéliser de nombreux phénomènes physiques (créneaux, sinusoïdes, etc.) On notera $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_{m,T}^0(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_{m,T}^1(\mathbb{R})$ les ensembles respectifs de fonctions continues, continues par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.



2 Structure préhilbertienne

Dans la suite, T est un réel strictement positif fixé et on note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la *pulsation* associée.

On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, g(t)\, dt.$$

2. En particulier, $\mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$ n'est pas un espace préhilbertien pour le produit scalaire habituel $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$.

La norme associée à ce produit scalaire est alors définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R}), \quad \|f\| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt}.$$

Exemple A8 :
Vérifier que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ précédemment définie est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$. ◇

⚠ Cette application n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{C}_{m,T}^0(\mathbb{R})$ (il faut que les fonctions soient continues). Quel est le problème ?

Définition/Proposition A9 *Polynômes trigonométriques*

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_n : x \mapsto \cos(n\omega x), \quad \psi_m : x \mapsto \sin(m\omega x).$$

Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{T}_N = \mathrm{Vect}(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N, \psi_1, \ldots, \psi_N).$$

$\mathcal{T}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$ appelé *ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur à N*.

Proposition A10

La famille $B_N = \left(\varphi_0, \sqrt{2}\varphi_1, \ldots, \sqrt{2}\varphi_N, \sqrt{2}\psi_1, \ldots, \sqrt{2}\psi_N\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{T}_N$.

Proposition A11

Soit $f \in \mathcal{C}_T^0(\mathbb{R})$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Notons S_N le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{T}_N$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + \sum_{m=1}^{N} b_m \sin(m\omega x),$$

en notant, pour tous $n, m \in [\![1, N]\!]$,

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt.$$

Autrement dit, S_N est le polynôme trigonométrique de degré inférieur à N qui "approche le mieux" f.

Corollaire A12

Avec les notations du la proposition A11,

$$\|S_N\|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

3 Coefficients de Fourier

Définition A13 *Coefficients de Fourier*[3]

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,T}(\mathbb{R})$. On définit les *coefficients de Fourier de* f par,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad b_m(f) &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega t)\,dt. \end{aligned}$$

On peut calculer ces intégrales sur n'importe quelle période de longueur T, notamment $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

Remarque A14 (*Interprétation physique*) : Le nombre $a_0(f)$ représente la *valeur moyenne de* f. La fonction $t \mapsto a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$ est appelée *n-ème harmonique de* f. ♢

Exemple A15 :

Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x.$$

1. Représenter la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Quelle est la classe de régularité de f ?
3. Calculer les coefficients de Fourier de f.

♢

Définition A16 *Symétrie de glissement*

Soit f une fonction T-périodique. On dit que f *vérifie une symétrie de glissement* si

$$\forall x \in D_f, \begin{cases} x + \frac{T}{2} \in D_f, \\ f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x). \end{cases}$$

Proposition A17

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,T}(\mathbb{R})$. Alors

(i) Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.
(ii) Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$.
(iii) Si f vérifie une symétrie de glissement, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_0(f) = 0, \quad a_{2n}(f) = 0, \quad b_{2n}(f) = 0.$$

Définition A18 *Somme partielle de Fourier*

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,T}(\mathbb{R})$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle *somme partielle de Fourier de f d'ordre N* la fonction $S_n(f)$

3. Joseph Fourier (1768-1830) : Mathématicien et physicien français. Ne pas confondre avec Charles Fourier, philosophe et économiste, qui a plutôt dit "une femme n'est destinée bien souvent qu'à soigner le pot au feu, et repriser les vieilles culottes" ou "plus un homme est astucieux et séducteur, plus il lui est facile d'arriver par le mariage à la fortune".

définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x) \Big).$$

Définition A19 *Série de Fourier*

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,T}(\mathbb{R})$. On appelle ***série de Fourier de*** f, quand elle existe, la fonction $S(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x) \Big).$$

⚠ La série de Fourier peut ne pas converger (c'est-à-dire que la somme infinie peut ne pas exister pour certains $x \in \mathbb{R}$).

Exemple A20 :
Reprenons l'exemple A15. On considère donc $f \in \mathcal{C}^1_{m,2\pi}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = x.$$

On a montré que ses coefficients de Fourier sont donnés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Ainsi on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

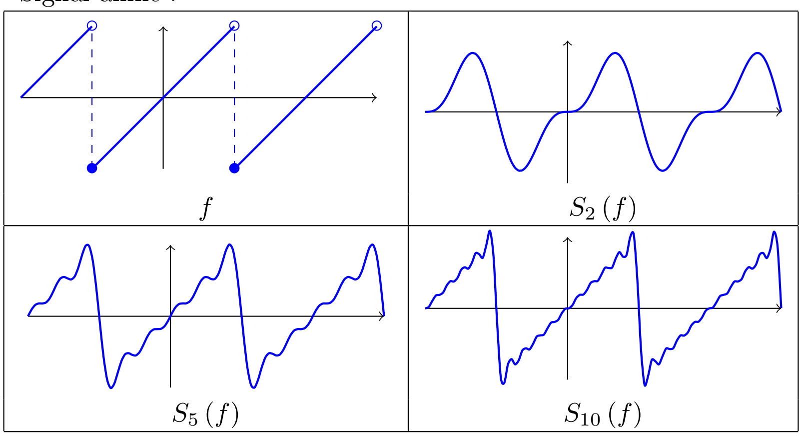
$$S_2(f)(x) = 2\sin x - \sin(2x), \quad S_5(f)(x) = 2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x).$$

Si l'on admet pour le moment que la série de Fourier de f converge, on a

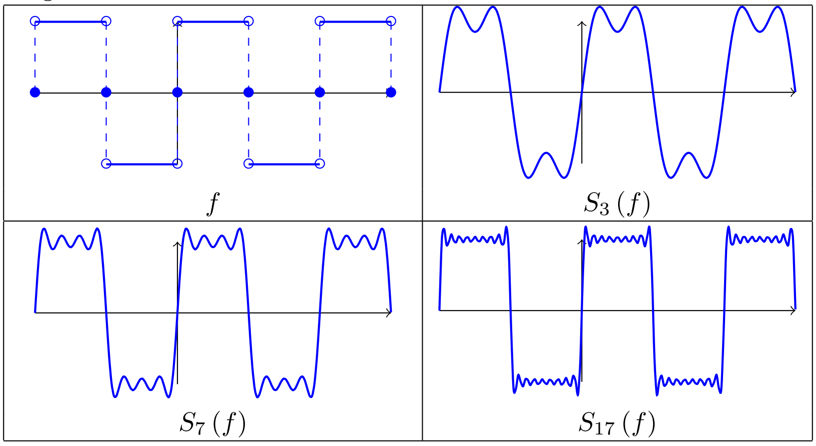
$$S(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\sin(nx)}{n}.$$

$\diamondsuit$

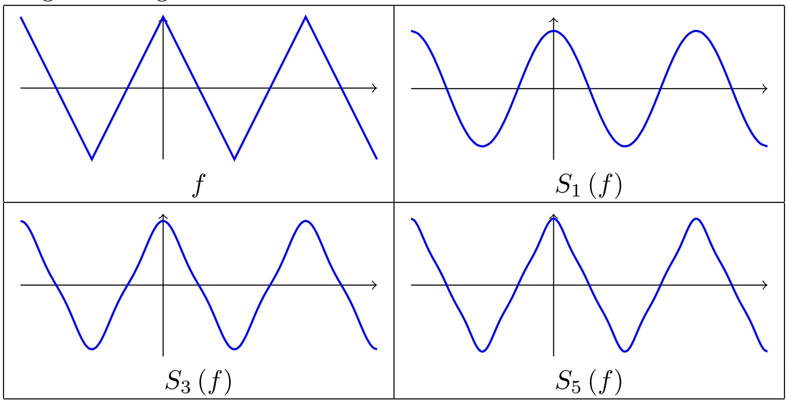
Signal affine :



Signal créneau :



Signal triangulaire :



B Convergence de la série de Fourier

1 Théorème de Parseval

Théorème B1 *Théorème de Parseval*[4]

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{m,T}(\mathbb{R})$. Alors les séries $\sum_n a_n(f)^2$ et $\sum_n b_n(f)^2$ convergent et

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right).$$

Corollaire B2

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

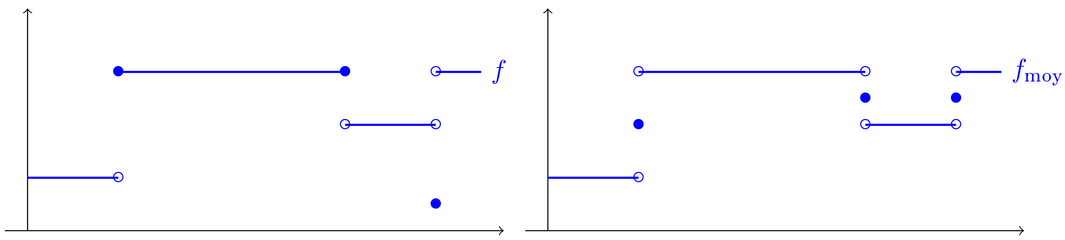
4. Marc-Antoine Parseval (1755-1836) : Mathématicien français.

Exemple B3 :
Soit f une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer que les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0. ♢

2 Théorème de Dirichlet

Définition B4 *Régularisée d'une fonction*
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On appelle *régularisée de f* la fonction f_{moy} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\text{moy}}(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}\right).$$



Lorsque f est continue en x, $f_{\text{moy}}(x) = f(x)$. Sinon, $f_{\text{moy}}(x)$ est la moyenne de la limite à droite et de la limite à gauche de f en x.

Théorème B5 *Théorème de Dirichlet*[5]
Soit $f \in \mathcal{C}^1_{m,T}(\mathbb{R})$. Alors la série de Fourier de f est convergente en tout point, et converge vers la régularisée de f. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\Big) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)+f(x-h)}{2}\right).$$

Corollaire B6
Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est T-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f est convergente en tout point, et converge vers f. Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\Big) = f(x).$$

Une fonction périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux est dite *développable en série de Fourier*.

Exemple B7 :
En utilisant la fonction définie dans l'exemple A15, montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

♢

5. Johann Dirichlet (1805-1859) : Mathématicien prussien.

🔧 Les théorèmes de Parseval et de Dirichlet servent à étudier la convergence de différentes séries. On peut voir le théorème de Parseval comme un calcul de norme limite, et celui de Dirichlet comme un calcul point à point. Ici, plus que la nature des séries considérées, il s'agit surtout d'outils pour calculer la valeur de sommes infinies.

C Exercices

Exercice 13.1

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la fonction impaire et 2-périodique vérifiant

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = 1.$$

1. Représenter f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Déterminer la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
4. En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Exercice 13.2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, paire et affine sur $[0, \pi]$ telle que $f(0) = \pi$ et $f(\pi) = -\pi$.

1. (a) Représenter f, et vérifier que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
   (b) Déterminer l'expression de f.
   (c) f est-elle développable en série de Fourier ? Si oui, donner l'expression de sa série de Fourier.
   (d) Représenter f, $S_1(f)$ et $S_5(f)$ sur un même graphique à l'aide de la calculatrice.
2. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.
   (a) Vérifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'expression de $F(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$.
   (b) Montrer que F est 2π-périodique. Représenter F.
   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) F est-elle développable en série de Fourier ? Si oui, donner l'expression de sa série de Fourier.
3. Justifier que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ converge et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. Justifier que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(2n+1)^6}$ converge et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.

Exercice 13.3

Soit $f : x \mapsto |\cos x|$.

1. Montrer que f est π-périodique et étudier sa parité.
2. Calculer ses coefficients de Fourier.
3. Déterminer la valeur de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 13.4

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $T > 0$. On définit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Soit f une fonction T-périodique et de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t} dt.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$, puis $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in [\![1,p]\!]$, exprimer $c_n\left(f^{(k)}\right)$ en fonction de $c_n(f)$.
4. (a) En utilisant le théorème de Parseval, montrer que les suites $\left(c_n\left(f^{(p)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(c_{-n}\left(f^{(p)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers 0.
   (b) Montrer que

$$a_n(f) \underset{n\to+\infty}{=\!=\!=} o\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad b_n(f) \underset{n\to+\infty}{=\!=\!=} o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Exercice 13.5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi,\pi], \quad f(x) = e^x + e^{-x}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi e^{(1+in)t} dt$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi e^t \cos(nt)\, dt$.
   (c) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi e^{-t} \cos(nt)\, dt$.
2. Déterminer la série de Fourier de f.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

   D'après les questions précédentes, exprimer la valeur des sommes suivantes en fonction de ch et sh :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Exercice 13.6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

1. Calculer $a_0(f')$.
2. Exprimer les autres coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f.
3. À l'aide du théorème de Parseval, démontrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2\, dt.$$

4. (a) Montrer que s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f = \lambda \cos + \mu \sin$, alors l'inégalité de Wirtinger est une égalité.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13.7

Soit f et g deux fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si tous les coefficients de f et g sont égaux, alors les fonctions f et g sont égales.

EXERCICE 13.8

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$.

1. Montrer que f est paire, de classe $\mathcal{C}^1$ et π-périodique sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{1+\cos^2 t} = \frac{1+\tan^2 t}{2+\tan^2 t}.$$

   (b) À l'aide du changement de variable $u = \tan t$, montrer que $a_0(f) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   (c) Montrer que $a_1(f) = 4 - 6a_0(f)$ et en déduire la valeur de $a_1(f)$.
3. Soit $n \geq 2$.
   (a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(2(n+2)t) + \cos(2(n-1)t) = 2\cos(2nt)\cos(2t)$.
   (b) Montrer que

$$a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = 0.$$

4. (a) Justifier que la suite $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $a_n(f) = \sqrt{2}\left(-3+2\sqrt{2}\right)^n$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+\cos^2 t)^2}$.

CHAPITRE XIV

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

> *Une fonction constante et e^x marchent tranquillement dans la rue. Soudain la fonction constante aperçoit un opérateur différentiel qui approche, et se sauve à toutes jambes. e^x la rattrape, et lui demande ce qui lui prend.*
> *– Tu ne te rends pas compte ! lui dit la constante. Si l'opérateur différentiel me rencontre, il me dérivera et je disparaitrai !*
> *– Ha ha !, dit e^x, il ne m'inquiète pas ! MOI, je suis e puissance x !*
> *Et il poursuit sa route. Évidemment, au bout de quelques mètres, il rencontre le fameux opérateur différentiel.*
> *– Salut, je suis e^x !*
> *– Salut, je suis $\dfrac{\partial}{\partial y}$...*
>
> Blague mathématique

Pré-requis :

- Dérivation
- Équations différentielles
- Géométrie du plan et de l'espace

	☹	😐	☺
Calculer les dérivées partielles ou le gradient d'une fonction de plusieurs variables			
Déterminer les points critiques et les extrema d'une fonction de plusieurs variables			
Résoudre des cas simples d'équations aux dérivées partielles avec changement de variable donné			
Déterminer l'équation de la tangente à une courbe du plan			
Déterminer l'équation du plan tangent à une surface de l'espace			

On définit un entier $n \geq 2$. On considère dans tout ce chapitre des fonctions de plusieurs variables réelles, c'est à dire de la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

L'accent sera mis sur les cas $n = 2$ et $n = 3$ (fonctions de la forme $f(x, y)$ ou $f(x, y, z)$).

⚠ Ne pas confondre les fonctions de plusieurs variables (de la forme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) et les fonctions vectorielles (de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$).

A Fonctions de plusieurs variables et dérivées partielles

1 Introduction à la topologie

La topologie désigne l'étude des sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$. C'est elle qui permet de parler de *voisinage* et, dans un certain sens, de *proximité* (sans forcément avoir besoin d'introduire une distance).

Définition A1 *Norme et distance euclidiennes*[1]

On appelle *norme euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

On appelle *distance euclidienne* sur $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

La norme et la distance euclidiennes sont les normes issues du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure *euclidienne* canonique. Il existe des normes non-euclidiennes (qui ne sont pas issues d'un produit scalaire), mais ce n'est pas l'objet de ce chapitre.

La norme $\|\cdot\|$

(i) est *définie* :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

(ii) est *positive* :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0.$$

(iii) est *homogène* :

$$\forall x \in E, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|.$$

(iv) vérifie *l'inégalité triangulaire* :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Définition A2 *Boule ouverte ou fermée*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$. On appelle *boule ouverte de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, a) < r\}.$$

On appelle *boule fermée de centre a et de rayon r* l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, a) \leq r\}.$$

1. Euclide (vers 300 av. J.C.) : Mathématicien grec.

En particulier,

$$B(a,0) = \emptyset, \quad \overline{B}(a,0) = \{a\}.$$

Définition A3 *Ensemble ouvert*

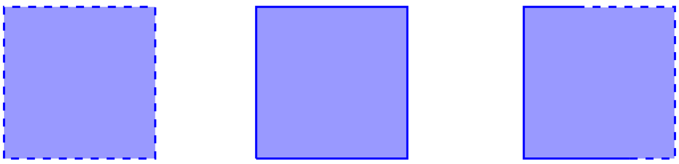
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que U est *ouvert* si

$$\forall a \in U, \quad \exists r > 0, \quad B(a,r) \subseteq U.$$

Définition A4 *Ensemble fermé*

Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que F est *fermé* si son complémentaire $F^C = \mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.

⚠ Un ensemble n'est pas soit fermé, soit ouvert. Il existe des ensembles qui ne sont ni l'un ni l'autre (à l'image des intervalles semi-ouverts dans $\mathbb{R}$) ou ouverts et fermés (lesquels ?).



Ensemble ouvert — Ensemble fermé — Ensemble ni ouvert ni fermé

Exemple A5 :

- $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte $B(a,r)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $a < b$ et $c < d$, le pavé *ouvert* $]a,b[\times]c,d[$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

◇

Exemple A6 :

- $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. En particulier, les singletons sont fermés.
- Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, le pavé *fermé* $[a,b] \times [c,d]$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

◇

Proposition A7 *Opérations sur les ensembles ouverts et fermés*

(i) $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois fermés et ouverts ; ce sont les seuls ensembles à vérifier cette propriété.
(ii) Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert.
(iii) Toute intersection **finie** d'ensembles ouverts est un ouvert.
(iv) Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé.
(v) Toute réunion **finie** d'ensembles fermés est un fermé.

Exemple A8 :
Montrer que $\mathbb{Z}$ est un ensemble fermé (dans $\mathbb{R}$). $\diamondsuit$

Définition/Proposition A9 *Intérieur d'un ensemble*

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle *intérieur de* A, noté $\mathring{A}$, le plus grand ouvert contenu dans A. On a la relation

$$a \in \mathring{A} \iff \exists r > 0, B\left(a, r\right) \subseteq A.$$

Alors $\mathring{A} \subseteq A$.

Définition A10 *Adhérence d'un ensemble*

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle *adhérence de* A, notée $\overline{A}$, le plus petit fermé qui contient A. On a la relation

$$a \in \overline{A} \iff \forall r > 0, B\left(a, r\right) \cap A \neq \emptyset.$$

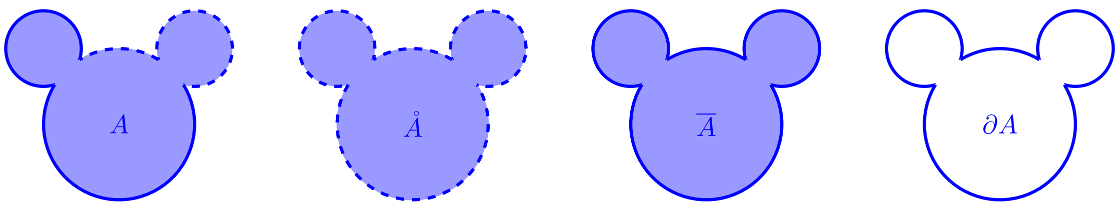
Alors $A \subseteq \overline{A}$.

Quand on parle de topologie, la notation $\overline{A}$ ne signifie pas "complémentaire" mais "adhérence". Attention aux confusions.

Définition A11 *Frontière d'un ensemble*

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On appelle *frontière de* A, l'ensemble

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$



Ensemble   Intérieur   Adhérence   Frontière

Proposition A12

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

(i) Si A est ouvert, alors $\mathring{A} = A$.
(ii) Si A est fermé, alors $\overline{A} = A$.

Exemple A13 :
On considère l'ensemble $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, y \leq 0, y + x \geq -1\right\}$. Représenter l'ensemble A, et déterminer graphiquement l'intérieur, l'adhérence et la frontière de A. $\diamondsuit$

<u>Définition A14</u> *Ensemble borné*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$. On dit que A est *un ensemble borné* s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Autrement dit, A est borné si $A \subseteq \overline{B}(0, M)$.

Exemple A15 :

- $\emptyset$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}^n$.
- Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, les boules $B(a, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ sont des ensembles bornés.
- Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, les pavés $]a, b[\times]c, d[$ et $[a, b] \times [c, d]$ sont des ensembles bornés de $\mathbb{R}^2$.

$\diamondsuit$

2 Limite et continuité

Dans toute la suite, on considère un sous-ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

<u>Définition A16</u> *Limite*

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $a \in D$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f *a pour limite* l *en* a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in B(a, \alpha) \cap A, \quad |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$.

C'est exactement la même chose que pour les fonctions d'une variable, en remplaçant $|x-a| < \alpha$ par $x \in B(a, \alpha)$.

<u>Définition A17</u> *Continuité*

Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ et $a \in D$. On dit que f *est continue en* a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On dit que f *est continue sur* D si f est continue en tout point de D. On note $\mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur D.

Exemple A18 :
Soit $K > 0$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est K-lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leq K\|x - y\|.$$

1. Montrer qu'une fonction K-lipschitzienne est continue sur D.
2. En déduire la continuité sur $\mathbb{R}^n$ des applications suivantes
   (a) L'application "norme" $N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$.
   (b) L'application "première composante" $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1 \end{array}$.

◊

⚠ Si f est continue, alors elle est continue en chacune de ses variables, mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple A19 :
Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de l'application $x \mapsto f(x, y_0)$.
2. Montrer que f est discontinue en 0.

◊

La morale de cet exemple est la suivante : la continuité d'une fonction de plusieurs variables est un exercice difficile, car il faut montrer que $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a, *peu importe* la façon dont x se rapproche de a (pas seulement horizontalement ou verticalement), mais aussi en diagonale ou en spirale...

3 Dérivées partielles et classe $\mathcal{C}^1$

Dans la suite, on considère U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et on note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition A20
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f *admet une dérivée partielle* en a par rapport à la i-ème variable si le nombre suivant existe :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}.$$

On note aussi $\partial_i f$ ou $\partial_{x_i} f$.

En dimension 2 ou 3, on note généralement les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

⚠ La dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables est aussi une fonction de plusieurs variables, et on prendra soin d'indiquer en quel point elle est évaluée.

Définition A21 *Gradient*
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et soit $a \in U$ tel que f admette des dérivées partielles en a. On définit le *gradient de f en a* comme le vecteur :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Définition A22 *Classe $\mathcal{C}^1$*
Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et on note $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, si f admet des dérivées partielles en tout point de U, et que celles-ci sont continues sur U (au sens de la définition A17). On note $f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Proposition A23 *Admise*

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

⚠ Ce n'est pas aussi évident qu'en dimension 1, car après tout, l'existence de dérivées partielles **n'implique pas** la continuité. Dans cette proposition, on dit justement que si f admet des dérivées partielles, et que si celles-ci sont continues (en tant que fonctions de plusieurs variables), alors f est elle-même continue.

Proposition A24 *Dérivée paramétrique*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On définit

$$\varphi : t \mapsto f\Big(x(t), y(t)\Big).$$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ et, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(t), y(t)\Big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(t), y(t)\Big).$$

Exemple A25 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On pose $g : t \mapsto f\left(t^2, \frac{1}{t}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
2. Justifier que g est dérivable sur cet ensemble et déterminer sa dérivée.

♢

Proposition A26 *Changement de variable*

Soit $f, x, y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On définit

$$\psi : (u, v) \mapsto f\Big(x(u, v), y(u, v)\Big).$$

Alors $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big), \\
\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big).
\end{aligned}$$

Exemple A27 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On pose $g : (u, v) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$.

1. Donner l'ensemble de définition de g.
2. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ensemble et déterminer ses dérivées partielles.

♢

Théorème A28 *Développement limité à l'ordre 1*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U)$ et $a \in U$. Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in U$. Alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=\!=} f(a) + \nabla f(a) \cdot h + o(\|h\|).$$

Autrement dit,

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=\!=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right).$$

On appelle *différentielle de f en a* (hors-programme) l'application $df(a) : h \mapsto \nabla f(a) \cdot h$. On note parfois

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, dy.$$

4 Dérivées secondes et théorème de Schwarz

Définition A29 *Classe $\mathcal{C}^2$*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Si les dérivées partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, et on note $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. On note alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Proposition A30

La somme, le produit, le produit par un scalaire, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) et la composée de fonctions continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$) sont continues (resp. de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$).

Proposition A31

Les ensembles $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$, et

$$\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}).$$

Exemple A32 :

1. Les fonctions polynomiales (en $x_1, x_2 \dots$) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Les fractions rationnelles (en $x_1, x_2 \dots$) sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

♢

Théorème A33 *Théorème de Schwarz*[2] *– Admis*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(U)$. Alors, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Exemple A34 :
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$.
2. Déterminer les dérivées secondes de f, et vérifier par le calcul que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

◇

B Applications en analyse

1 Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Définition B1 *Point critique et extremum*

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $(x_0, y_0) \in U$.

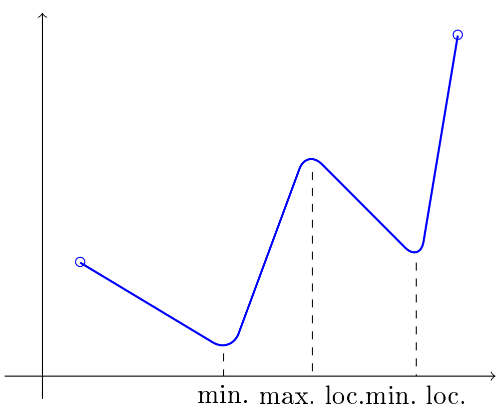
(i) On dit que (x_0, y_0) est un *point critique* si $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

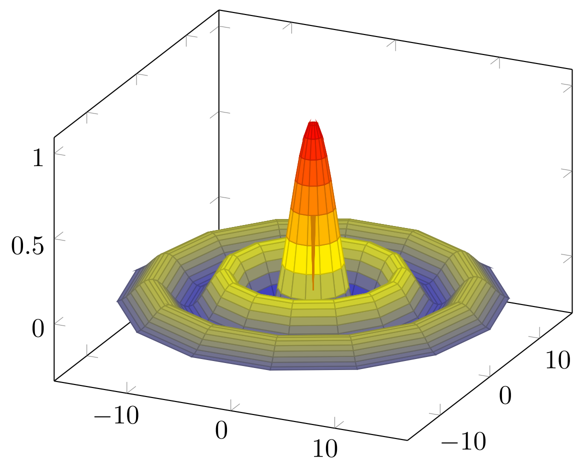
(ii) On dit que (x_0, y_0) est un *maximum global* si

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

(iii) On dit que (x_0, y_0) est un *maximum local* si

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall (x, y) \in U \cap B((x_0, y_0), \alpha), \quad f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$





2. Hermann SCHWARZ (1843-1921) : Mathématicien allemand.

Théorème B2

Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $(x_0, y_0) \in U$. Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique.

⚠ On retiendra que, dans un ouvert, :

Extremum global $\Longrightarrow$ Extremum local $\Longrightarrow$ Point critique

La situation est exactement la même que pour les fonctions d'une variable. En particulier, les "cas particuliers aux bornes" ne peuvent pas se produire dans un ouvert.

⚠ La réciproque est fausse : un point peut-être critique, sans être un extremum local.

⚠ Ce n'est pas vrai si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ ou si U n'est pas ouvert !

Théorème B3 *Théorème des bornes atteintes*

Soit D une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$. Alors f possède (au moins) un maximum global et un minimum global.

Autrement dit, f est bornée (admet une borne supérieure et une borne inférieure) et atteint ses bornes (le sup est un max et l'inf est un min).

🔧 Pour déterminer les extrema globaux d'une fonction de plusieurs variables $f\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie sur une partie fermée et bornée D :

1. On vérifie que D est fermée et bornée, et que f est continue sur D. Ainsi f admet des extrema sur D.
2. (a) On justifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur $\mathring{D}$ et on détermine ses points critiques.
   (b) On détermine les extrema de f sur la frontière ∂D en se ramenant à une fonction d'une variable.
3. On compare les valeurs obtenues pour déterminer les extrema globaux de f sur D.

Remarque B4 : Pour les fonctions d'une variable, on détermine généralement si un point critique est un extremum local en étudiant le signe de la dérivée seconde (dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$). Il existe des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) similaires en dimension supérieure, où l'on regardera le signe des valeurs propres d'une certaine matrice, dite *hessienne*, jouant le rôle de la dérivée seconde.

Ce lien entre signe des valeurs propres et comportement local serait également à mettre en parallèle avec la stabilité et la stabilité asymptotique dans le cas des systèmes différentiels linéaires. ♢

Exemple B5 :
On définit l'application $f : (x, y) \to xy$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $]-2, 1[^2$.
2. Justifier que f admet des extrema globaux sur $[-2, 1]^2$, puis les déterminer.
3. Déterminer les éventuels extrema locaux de f sur $[-2, 1]^2$.

♢

Exemple B6 :
On définit l'application $f : (x, y) \to xy(1 - x - y)$.

1. Représenter l'ensemble

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}.$$

2. Déterminer les extrema globaux de f sur D.

$\diamondsuit$

Exemple B7 :
Déterminer les extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 - 2y^2$ sur $[-4, 4]^2$. $\diamondsuit$

2 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une équation faisant intervenir les dérivées partielles de f. En physique, on est amené à en résoudre constamment : équation de la chaleur, de transport, de propagation, etc. **Il n'existe pas de méthode générale** (c'est même souvent un type d'équation très compliqué à résoudre), il faut alors suivre les indications données dans l'énoncé.

Comme pour les équations différentielles, résoudre une équation aux dérivées partielles signifie "déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation donnée".

Exemple B8 :
Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f. \tag{E}$$

à l'aide du changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$. $\diamondsuit$

Exemple B9 :
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{E}$$

en passant aux coordonnées polaires. $\diamondsuit$

Exemple B10 :
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} \end{cases} \tag{$\star$}$$

$\diamondsuit$

C Applications en géométrie

1 Courbes et tangentes

<u>Définition C1</u> *Courbe*
Une *courbe du plan* est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une certaine équation. Une courbe $\mathscr{C}$ est définie par une équation cartésienne [3] $f(x, y) = 0$. Plus précisément

$$\mathscr{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\right\}.$$

⚠ Aucun lien avec un noyau. L'application f n'est pas linéaire.

⚠ L'équation cartésienne n'est pas unique ; on devrait dire "une équation cartésienne".

Remarque C2 : On connaît trois façons différentes de définir une courbe :

1. le graphe d'une fonction φ :
$$\mathscr{C} = \{(x, \varphi(x)) / x \in \mathbb{R}\}.$$
2. une courbe paramétrée par $(x(t), y(t))$:
$$\mathscr{C} = \{(x(t), y(t)) / t \in \mathbb{R}\}.$$
3. une équation cartésienne $f(x, y) = 0$:
$$\mathscr{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\right\}.$$

On fera particulièrement aux ensembles d'arrivée et de départ des fonctions φ, x, y, f définies précédemment. ◇

Exemple C3 :

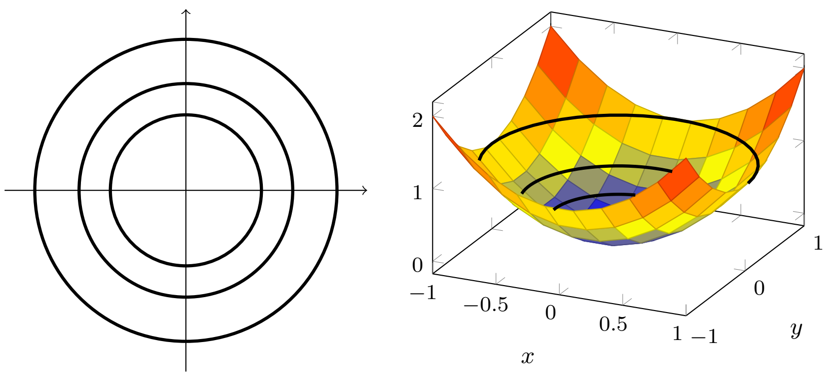
- Le cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon $R > 0$ est une courbe d'équation cartésienne
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0,$$
également paramétrée par $(R\cos t, R\sin t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.
- Le graphe de la fonction exponentielle est une courbe d'équation cartésienne
$$y - e^x = 0.$$

◇

Définition C4 *Ligne de niveau*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau λ de f* l'ensemble
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = \lambda.\right\}$$
C'est également la courbe d'équation cartésienne
$$f(x, y) - \lambda = 0.$$

Les lignes de niveau correspondent par exemple au lignes équipotentielles vues en électromagnétisme.

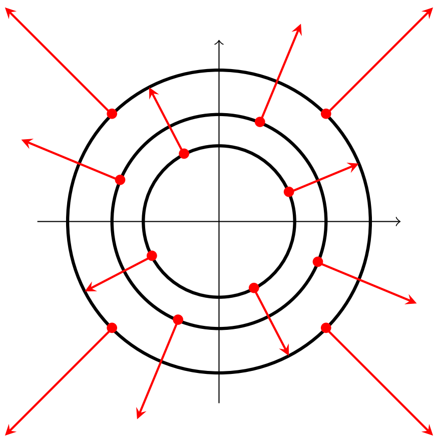


Lignes de niveau $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et 1 de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

3. René Descartes (1596-1650) : Mathématicien et philosophe français.

Proposition C5 *Admise*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.



Lignes de niveau et gradient de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

Dans la suite, on considère $\mathscr{C}$ une courbe du plan, d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, avec $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$

Définition C6 *Point régulier*

Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$. On dit que M_0 est un *point régulier* de $\mathscr{C}$ si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Dans le cas contraire, M_0 est dit *singulier*.

Définition C7 *Tangente*

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point régulier de $\mathscr{C}$. La *tangente à la courbe* $\mathscr{C}$ *en* M_0 est la droite passant par M_0 de vecteur normal $\nabla f(x_0, y_0)$.

Exemple C8 :
On considère la courbe du plan $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $y - x^2 = 0$. On considère également le point M de coordonnées $(-1, 1)$.

1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ est régulière et que $M_0 \in \mathscr{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0, que l'on notera Δ.
3. Déterminer une fonction φ telle que $\mathscr{C}$ représente le graphe de φ, et retrouver l'équation de Δ d'une deuxième manière.
4. Déterminer un paramétrage de $\mathscr{C}$, et retrouver l'équation de Δ d'une troisième manière.

$\diamondsuit$

Exemple C9 :
On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $y^2 = x^3 - 3x + 5$.

1. Vérifier que $M_0\left(-2, \sqrt{3}\right)$ est un point régulier de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point M_0.

$\diamondsuit$

Exemple C10 :

On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par le paramétrage $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t-1}{2} \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle qu'une équation cartésienne de la courbe $\mathscr{C}$ est $f(x, y) = 0$.
2. Après avoir justifié que le point $M_0(0, 1)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$, déterminer de deux manières différentes une équation cartésienne de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ en M_0.

$\diamondsuit$

2 Surfaces et plans tangents

Définition C11 *Surface*
Une *surface de l'espace* est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dont les coordonnées vérifient une certaine équation. Une surface $\mathscr{S}$ est définie par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Autrement dit

$$\mathscr{S} = \left\{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\right\}.$$

Remarque C12 : On connaît deux façons différentes de définir une surface :

1. le graphe d'une fonction φ de deux variables :
$$\mathscr{C} = \left\{(x, y, \varphi(x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
2. une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$:
$$\mathscr{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\right\}.$$

Quels sont les ensembles d'arrivée et de départ des fonctions φ, x, y, f définis précédemment ? $\diamondsuit$

Exemple C13 :
La sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon $R > 0$ est une surface d'équation cartésienne

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Le graphe de la fonction **de deux variables** $(x, y) \mapsto xy + 2\cos x$ est une courbe d'équation cartésienne

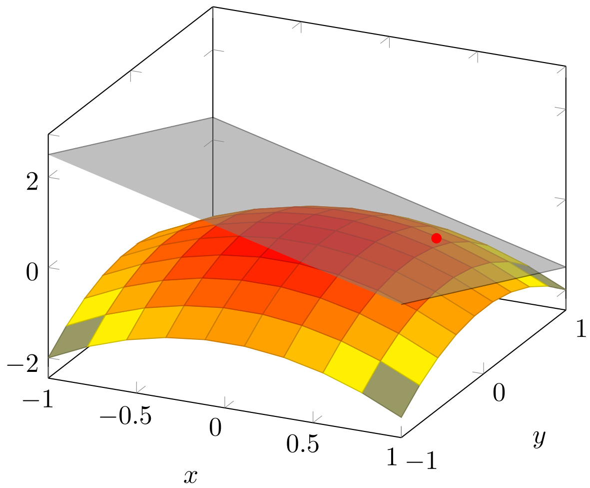
$$z - xy - 2\cos x = 0.$$

$\diamondsuit$

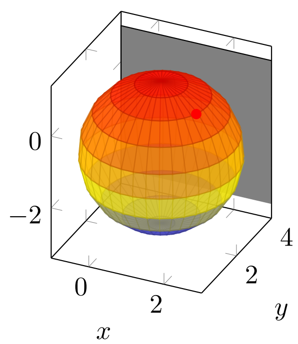
Dans la suite, on considère $\mathscr{S}$ une surface de l'espace, d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, avec $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$

Définition C14 *Point régulier*
Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. On dit que M_0 est un *point régulier* de $\mathscr{S}$ si $\nabla f(a) \neq 0$. Dans le cas contraire, M_0 est dit *singulier*.

Définition C15 *Plan tangent*
Soit M_0 un point régulier de $\mathscr{S}$. Le *plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ en M_0* est le plan passant par M_0 de vecteur normal $\nabla f(a)$.



Exemple C16 :
Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère de centre $(1, 2, -1)$ et de rayon 2, au point $M_0\,(1, 4, -1)$. ♢



Définition/Proposition C17 *Position relative d'une surface par rapport à son plan tangent*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = \varphi(x, y)$, représentant le graphe de la fonction φ. Soit $M_0\,(x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)) \in U$. Alors M_0 est un point régulier de $\mathscr{S}$ et il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0 est

$$z = ax + by + c.$$

On dit que $\mathscr{S}$ *est au-dessus de son plan tangent en* M_0 si

$$\forall (x, y) \in U, \quad \varphi(x, y) \geq ax + by + c.$$

On dit que $\mathscr{S}$ *est en dessous de son plan tangent en* M_0 si

$$\forall (x, y) \in U, \quad \varphi(x, y) \leq ax + by + c.$$

Si les propriétés ci-dessous sont vraies pour (x, y) au voisinage de (x_0, y_0), on parlera alors simplement de positions relatives *locales*.

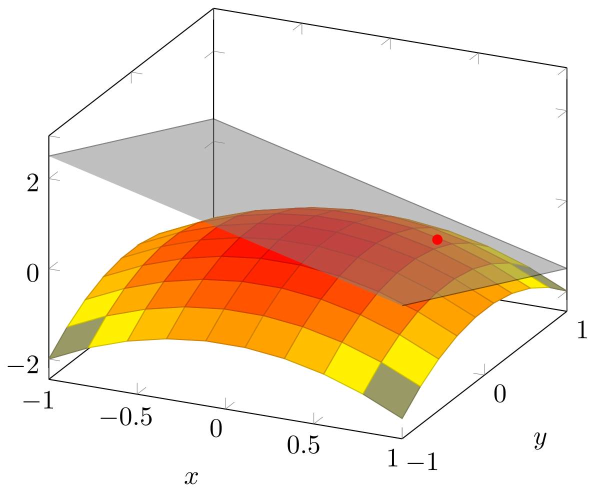
⚠ Une surface peut aussi traverser son plan tangent...

⚠ La notion de "dessus/dessous" n'a aucun sens pour une surface quelconque, il faut étudier le graphe d'une fonction de deux variables.

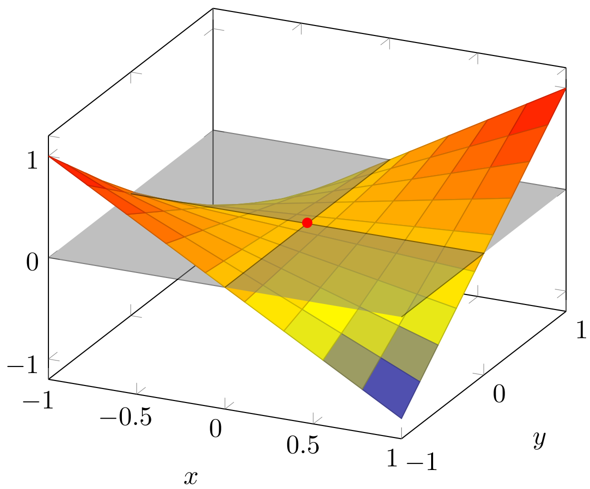
En posant $f(x,y,z) = \varphi(x,y) - z$, le gradient de f est de la forme $\nabla f(x,y,z) = (\ldots, \ldots, -1)$ donc tous les points de $\mathscr{S}$ sont réguliers. Le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0 admet alors pour équation cartésienne[4] :

$$z = \varphi(x_0, y_0) + \nabla\varphi(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Il convient de voir le lien avec la formule de Taylor...



Surface localement sous son plan tangent



Surface traversant le plan tangent

Exemple C18 :
On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = \ln(2x + y)$.

1. Montrer que l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point $(-1, 3, 0)$ est $2x + y - z - 1 = 0$.
2. (a) Justifier que, pour tout $t \in \,]-1, +\infty[$, $\ln(1+t) \leq t$.
   (b) Étudier les positions relatives de $\mathscr{S}$ et de son plan tangent au point $(-1, 3, 0)$.

$\diamondsuit$

Exemple C19 :
On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z = xy^2$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ à l'origine.
2. Étudier les positions relatives de $\mathscr{S}$ et de son plan tangent à l'origine.

$\diamondsuit$

D Exercices

Exercice 14.1

Calculer les dérivées partielles premières et secondes des applications suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \arctan(2x + y), \qquad g : (x,y,z) \mapsto e^{x^2 y} \sin(xz).$$

Exercice 14.2

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer le gradient des applications suivantes :

$$f : (x,y) \mapsto \varphi\left(x^2 - y^2\right), \qquad g : (x,y,z) \mapsto \varphi\left(xy + yz^2\right), \qquad h : (x,y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\, dt.$$

4. Il est inutile de retenir la forme de l'équation du plan tangent, il suffit de savoir la retrouver comme on l'a fait auparavant et l'écrire sous la forme $z = \ldots$

Exercice 14.3

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{$\star$}$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (2x+y, 3x+y)$.

Exercice 14.4

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y). \tag{$\star$}$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (2x+y, 3x+y)$.

Exercice 14.5

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y). \tag{$\star$}$$

Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 14.6

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{$\star$}$$

Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 14.7

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{$\star$}$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (x+y, x-y)$.

Exercice 14.8

Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On définit

   $$g : t \mapsto f(x+t, y+t) - f(x,y).$$

   Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et déterminer g'.
2. Montrer que f vérifie

   $$\forall x,y,t \in \mathbb{R}, \quad f(x+t,y+t) = f(x,y) \tag{$\star$}$$

   si, et seulement si, f vérifie

   $$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \tag{$\star\star$}$$

Exercice 14.9

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x + y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy) + 2y \end{cases} \tag{$\star$}$$

Exercice 14.10

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x \end{cases} \tag{$\star$}$$

Exercice 14.11

Déterminer les extrema sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]^2$ de la fonction f définie par

$$f : (x, y) \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(x + y).$$

Exercice 14.12

Déterminer l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = \cos(x - y)$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Exercice 14.13

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$, et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
3. Déterminer les points de $\mathscr{S}$ (s'il en existe) en lesquels le plan tangent à $\mathscr{S}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.

Exercice 14.14

On considère la fonction

$$\varphi : (x, y) \mapsto \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 2y^2.$$

On définit l'ensemble $D = [-4, 4]^2$, qui est une partie de $\mathbb{R}^2$.

1. Représenter l'ensemble D. D est-il ouvert ? Fermé ? Borné ? Justifier rapidement que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ admet trois points critiques sur l'intérieur de D, qu'on déterminera.
3. Justifier que φ admet des extrema globaux sur D, qu'on déterminera.

On note $\mathscr{S}$ le graphe de la fonction φ, c'est-à-dire la surface d'équation $z = \varphi(x, y)$. On introduit la fonction

$$f : (x, y, z) \mapsto \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 2y^2 - z.$$

4. Soit A le point de cordonnées $(0,0,0)$.
   (a) Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_A$ à la surface $\mathscr{S}$ en A.
   (b) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$ sur $[-1,1]$.
   (c) En déduire que φ admet un maximum local en $(0,0)$, et comparer les positions relatives de la surface $\mathscr{S}$ avec son plan tangent en A.
5. Soit B le point de cordonnées $(2,0,-4)$.
   (a) Déterminer l'équation du plan tangent $\mathscr{P}_B$ à la surface $\mathscr{S}$ en B.
   (b) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto \varphi(x,0)+4$ sur $[1,3]$ et de la fonctions $y \mapsto \varphi(2,y)+4$ sur $[-1,1]$.
   (c) En déduire que φ n'admet pas d'extremum local en $(2,0)$, et comparer les positions relatives de la surface $\mathscr{S}$ avec son plan tangent en B.

Exercice 14.15

On appelle *équation des ondes de D'Alembert* l'équation décrivant la progression d'une onde en physique :

$$\Delta f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

On cherche à résoudre la version unidimensionnelle de l'équation des ondes, c'est-à-dire déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t). \tag{$\star$}$$

On appelle *onde progressive* toute fonction de la forme $(x,t) \mapsto \varphi(x-ct)$ et *onde régressive* toute fonction de la forme $(x,t) \mapsto \psi(x+ct)$, où φ et ψ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer qu'une onde progressive est solution de l'équation des ondes unidimensionnelle. On admet qu'une onde régressive est également solution de cette même équation.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on pose le changement de variables $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ et

$$f(x,t) = g(u,v).$$

   (a) Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ en fonction des dérivées partielles de g.
   (b) Montrer que f est solution de $(\star)$ si, et seulement si, g vérifie

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

   (c) Montrer que les solutions de l'équation des ondes unidimensionnelle sont exactement la somme d'une onde progressive et d'une onde régressive.

Exercice 14.16

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en A, puis étudier les positions relatives du plan tangent et de la surface.

1. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = x^2 - y^2$ et $A(0,0,0)$.
2. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = x\left(\ln^2 x + y^2\right)$ et $A(1,0,0)$.

Exercice 14.17

Le but de cet exercice est de déterminer les extrema sur l'ensemble $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ de la fonction f définie par

$$f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Représenter D et justifier que f admet des extrema sur D.

2. Montrer que f admet trois points critiques sur l'intérieur de D, qu'on déterminera.
3. (a) Montrer que $\partial D = \{(2\cos t, 2\sin t)\,/ t \in [0, 2\pi]\}$.
   (b) Montrer que
$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f(2\cos t, 2\sin t) = -8\sin^2(2t) + 8\sin(2t) + 8.$$
   (c) Etudier les extrema de la fonction $u \mapsto -8u^2 + 8u + 8$ sur $[-1, 1]$
   (d) En déduire les extrema de f sur ∂D.
4. Conclure.

Exercice 14.18

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $z^3 = xy$, et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$ en lesquels le plan tangent contient la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 14.19

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 centré en l'origine. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}$?

Indication : on pourra introduire la fonction $f : (x, y) \mapsto 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{y}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$ *définie sur le domaine* $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y \leq 2\pi\right\}$.

CHAPITRE XV

PRÉPARATION AUX ORAUX

> *L'inédit surgit, qu'on le veuille ou non, dans la multiplicité des répétitions.*
>
> Jacques Derrida

On considère dans la suite que les commandes suivantes sont exécutées en préambule de tous les scripts.

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

A Probabilités finies

🎓	➤
• Modélisation et compréhension de l'expérience • Union, intersection, indépendance d'évènements • Loi certaine, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme • Loi d'une variable aléatoire, loi conjointe • Formule des probabilités totales	• Simuler une expérience • Simuler une loi de Bernoulli • Simuler plusieurs fois la même expérience, représenter et interpréter les résultats

Exemple A1 :
Un message doit transiter par un certain nombre de personnes. Chaque personne est susceptible soit de transmettre le message fidèlement à la suivante, soit de mentir et de lui transmettre son exact contraire. La probabilité qu'une personne mente est notée $p \in]0,1[$. On suppose que les personnes ne se concertent pas entre elles. On note p_n la probabilité que le message transmis par la n-ème personne soit identique au message initial. On conviendra que $p_0 = 1$.

1. (a) Proposer une fonction Python d'en-tête `chaine(n,p)` qui simule la réalisation de n transmissions, n étant un entier naturel non-nul fourni en paramètre, et p la probabilité définie dans l'énoncé. Elle renverra 1 si le message transmis par la n-ème personne est identique au message initial, et 0 sinon.
   (b) On répète N chaînes, toutes de mêmes paramètres n et p. À l'aide de la fonction précédente, proposer une fonction d'en-tête `simul(N,n,p)` qui renvoie la proportion de messages correctement transmis par

la n-ème personne au cours de N réalisations de cette même chaîne. Tester la fonction pour différentes valeurs de p (on pourra prendre $n = 200$ et $N = 3000$). Que constate-t-on ?

2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = p + (1 - 2p)\, p_n$$

3. (a) Trouver un réel x tel que $x = p + (1 - 2p)\, x$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = p_n - x$ est géométrique.
   (c) En déduire une expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter et commenter.

$\diamondsuit$

Exemple A2 :
On considère une urne contenant n boules blanches et m boules noires indiscernables au toucher.

1. Proposer une fonction Python `tirage(n,m)` simulant un unique tirage dans l'urne, renvoyant 1 si une boule tirée est blanche, et 0 sinon.
2. Dans la suite, on suppose que l'urne contient deux boules blanches et huit boules noires. Un joueur tire successivement, et avec remise, cinq boules dans l'urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne trois points, et pour chaque boule noire tirée, il perd deux points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées, et Y la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) À l'aide de la fonction `tirage(2,8)` définie précédemment, proposer une nouvelle fonction Python `remise()` simulant cinq tirages successifs avec remise, et retournant le nombre de points obtenus.
   (b) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (c) Exprimer Y en fonction de X, et déterminer son espérance et sa variance.
3. Dans cette dernière question, on suppose toujours que $n = 2$ et $m = 8$, mais aussi que les cinq tirages successifs se font sans remise. À l'aide de la fonction `tirage` définie précédemment, proposer une nouvelle fonction Python `sansremise()` simulant cinq tirages successifs sans remise, et retournant le nombre de points obtenus.

$\diamondsuit$

B Séries de Fourier

• Calcul de coefficients de Fourier • Théorème de Parseval • Théorème de Dirichlet	• Calculer une somme partielle de Fourier • Tracer une fonction ou sa série de Fourier

Exemple B1 :
Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}.$$

1. Tracer à la main, en justifiant, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$
2. (a) Calculer, pour tout entier naturel n, les coefficients réels de Fourier b_n (associés aux fonctions sinus) de la fonction f.
   (b) Calculer le coefficient de Fourier a_0.
   (c) Calculer les coefficients réels de Fourier a_n (associés aux fonctions cosinus) pour n un entier non nul, à l'aide de deux intégrations par parties.
3. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. (a) Illustrer à l'aide du langage Python le résultat précédent en écrivant une fonction prenant en paramètre un entier naturel N non nul et renvoyant la valeur de la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{k^4}$. La fonction pourra avoir comme en-tête `def sommeP(N)`.
   (b) Calculer les sommes partielles au rang 10, 100 et 1000 et comparer avec $\frac{\pi^4}{90}$. On rappelle que la valeur π est obtenue à l'aide de la commande `math.pi`

$\diamondsuit$

Exemple B2 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = e^x + e^{-x}.$$

1. Étudier la parité de la fonction f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\int_0^{\pi} e^{(1+in)t} dt$ et en déduire que

$$\int_0^{\pi} e^t \cos(nt)\, dt = \frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1 + n^2},$$

   (b) Déterminer la valeur de $\int_0^{\pi} e^{-t} \cos(nt)\, dt$.
3. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.
4. (a) Écrire une fonction Python ayant pour en-tête `SerieF(x,N)`, prenant en paramètre un réel x et un entier naturel N non nul, et renvoyant la valeur de la somme partielle suivante :

$$S_N(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{2(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1 + n^2)} \cos(nx).$$

   On pourra utiliser la bibliothèque `math` et notamment `math.exp` et `math.pi`.
   (b) À l'aide de Python, tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions S_2, S_8 et f.
5. À l'aide des questions précédentes, déterminer la valeur des sommes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

On pourra utiliser les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

$\diamondsuit$

C Réduction

• Lien entre endomorphisme et matrice carrée • Formule de changement de base, de changement de coordonnées • Calculs de polynômes caractéristiques et de valeurs propres • Détermination de vecteurs propres et de matrices de passage • Diagonalisation, trigonalisation • Théorème spectral et réduction des matrices symétriques réelles • Résolution de systèmes différentiels	• Créer et manipuler des matrices • Effectuer les opérations matricielles usuelles (somme, produit, puissance, transposée...) • Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée

Exemple C1 :
Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A(a) = \begin{bmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A(a)$.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a le système linéaire $A(a)X = B$ admet une unique solution.
3. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 0,5y + 2,5z + w \\ y' = 2,5x - y + z + 2,5w \\ z' = -2,5z + w \\ w' = -z \end{cases} \tag{S}$$

   (a) On note A la matrice associée au système (S). Montrer qu'il existe deux matrices P et D, avec P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$. On déterminera ces matrices à l'aide de Python. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes de la librairie `numpy` : `numpy.linalg.eig` et `numpy.diag`.

   (b) Déterminer à la main la solution Y_0 du système différentiel $Y' = DY$ vérifiant $Y_0(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (c) Écrire en Python une fonction `solution(t)` prenant en paramètre un nombre réel t et renvoyant la valeur de la solution X du système (S) en t, tel que $P^{-1}X = Y_0$.

$\diamondsuit$

Exemple C2 :
On considère les trois suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 4b_n + 3c_n, \\ b_{n+1} = 2a_n - 3b_n + 2c_n, \\ c_{n+1} = a_n. \end{cases}$$

On note également, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$.

1. Écrire une fonction Python `suiterec1(n)` prenant en paramètre un entier naturel n et retournant les valeurs de a_n, b_n et c_n sous la forme d'une liste à trois éléments.
2. (a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$
   (b) Déterminer les valeurs propres de M.
   (c) Déterminer les espaces propres de la matrice M. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?
3. (a) Déterminer une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
   (b) Déterminer la valeur de P^{-1} à l'aide de Python.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de T^n. On pourra décomposer astucieusement la matrice T.
4. Proposer une nouvelle fonction Python `suiterec2(n)` retournant les valeurs de a_n, b_n et c_n sans boucle `for` ni `while`. On pourra utiliser les résultats de la question 3 .

♢

D Intégrales sur un segment ou sur un intervalle

• Calcul ou identification de primitive • Théorème fondamental de l'analyse et manipulation de primitives • Théorèmes de comparaison et d'équivalence des fonctions positives • Intégrales de Riemann • Sommes de Riemann • Intégration par parties (sur segment) • Changement de variables (sur segment ou intervalle)	• Calculer une fonction et tracer son graphe • Calculer une intégrale

Exemple D1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$.

1. (a) Ecrire en Python une fonction `somme(n)` prenant en paramètre un entier naturel non-nul n et retournant la valeur de S_n.
   (b) Calculer S_{10}, S_{100} et S_{1000}. Que peut-on observer ?
2. (a) Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$.
   (b) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{3}-1$.

♢

Exemple D2 :

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-n}}{1+t} dt$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe et $I_n \geq 0$.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Que peut-on en déduire ?
4. En majorant l'intégrale, montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

5. (a) Calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) En déduire que I_n est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$ quand $n \to +\infty$.
6. En utilisant la question 5a, écrire en Python une fonction `integrale(n)`prenant en paramètre un entier naturel non-nul n et retournant la valeur de I_n.

$\diamondsuit$

Exemple D3 :

1. Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J. Soit f continue sur J et F une primitive de f . Montrer que la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner sa dérivée.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. (a) Montrer que la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que
   $$\forall x > 0, \quad G'(x) = \frac{\pi}{2} \times \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$
   (b) Soit $x > 0$. Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$, et en déduire une expression simplifiée de $G(x)$.
   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \arctan t}{(1+t^2)^2} dt$ est convergente, et déterminer sa valeur.
4. (a) Écrire en Python une fonction `fonctionG(x)` prenant comme paramètre un réel strictement positif x et retournant $G(x)$.
   (b) Tracer le graphe de la fonction G et la droite d'équation cartésienne $y = \dfrac{\pi}{8}$.

$\diamondsuit$

E Produits scalaires et isométries

• Définition et propriétés du produit scalaire, de la norme • Principaux produits scalaires • Inégalité de Cauchy-Schwarz • Bases orthonormées • Orthogonalité • Projection et distance à un sous-espace de dimension finie • Définitions et propriétés des isométries et des matrices orthogonales • Éléments caractéristiques des isométries en dimensions 2 et 3	• Définir et manipuler des vecteurs, des polynômes, des matrices • Calculer des produits scalaires, notamment en base orthonormée

Exemple E1 :

Soit ρ un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Ecrire en langage Python une fonction permettant de calculer le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ appelés a et b à l'aide d'une boucle. La fonction renvoyant un scalaire pourra avoir pour en-tête `monProd(a,b)`.
   (b) Comparer les résultats avec le produit scalaire fourni par la bibliothèque `numpy`, `numpy.vdot(a,b)`, sur les vecteurs $a = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que ρ est un endomorphisme orthogonal direct.
3. Montrer que $\omega = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est invariant par ρ. En déduire la nature de l'isométrie.
4. Montrer que le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à ω.
5. Donner les éléments caractéristiques de cette transformation.

♢

Exemple E2 :

1. Rappeler la dimension et la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On note $P_0 = 1$, $P_1 = X + 1$ et $P_2 = (X+2)^2$. Vérifier que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, on définit $\varphi(P, Q)$ comme étant $\displaystyle\sum_{k=-1}^{1} P(k) \times Q(k)$. Montrer que l'application φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Écrire en Python une fonction renvoyant la valeur de $\varphi(P_i, P_j)$ en fonction des paramètres entiers i et j.
5. $\mathcal{B}$ est-elle une base orthonormée (relativement à φ) ?
6. A partir de $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$.
7. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ engendré par P_0 et P_1. Déterminer la distance du polynôme X à H puis la distance de X^2 à H.

♢

F Suites et séries

• Calcul et manipulation de limites • Théorème de la limite monotone • Suites adjacentes • Théorèmes de comparaison et d'équivalence de séries à termes positifs • Intégrales de Riemann • Critère de D'Alembert • Comparaison série/intégrale	• Calculer des sommes partielles • Mettre en évidence une limite de suite ou de série • Calculer des suites définies implicitement ou explicitement

Exemple F1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.

1. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$
2. En déduire que, si $\sum_n u_n^2$ converge, alors $\sum_n u_n 2^{-n}$ converge également.

$\diamondsuit$

Exemple F2 :

1. Étudier la convergence absolue de $\sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
2. Montrer l'existence et calculer l'intégrale de $\int_0^1 t^{3n} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que
$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3} dt = 0.$$
4. Calculer $\sum_{n=0}^{N} (-t)^{3n}$ pour $t \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que $\sum_n \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3}.$$
6. Écrire en langage Python une fonction `somme(N)` prenant en paramètre un entier naturel non-nul N et renvoyant la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$. À l'aide de cette fonction, mettre en évidence la convergence établie à la question 5.

$\diamondsuit$

Exemple F3 :
Soit $a > 0$. On note
$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt, \quad S_a = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-an^2}.$$

1. Montrer que $e^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=\!=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. En déduire que I_1 converge. On admet que $I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t\sqrt{a}$, montrer que I_a converge et préciser sa valeur.
3. En déduire la nature de la série $\sum_n e^{-an^2}$.
4. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto e^{-ax^2}$ sur $[0, +\infty[$, et en déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{-a(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-at^2} dt \leq e^{-an^2}.$$
Montrer alors que
$$I_a \leq S_a \leq I_a + 1.$$
5. (a) Écrire une fonction Python `somme(N,a)` prenant en paramètre un entier naturel non nul n et retournant la valeur de $\sum_{n=0}^{N} e^{-an^2}$.

(b) Donner une valeur approchée de S_1 et la comparer avec I_1.

$\diamondsuit$

G Courbes paramétrées, fonctions de plusieurs variables

• Dérivée, dérivées partielles et gradient • Tableaux de variations et tracé de graphes • Points réguliers et tangentes • Plans tangents • Équations aux dérivées partielles • Courbes et surfaces, équations cartésiennes	• Tracer des graphes de fonctions • Tracer des courbes paramétrées • Mettre en évidence des limites

Exemple G1 :
On considère la surface (S) d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1 = 0.$$

1. Écrire en langage Python une fonction permettant de renvoyer `True` si un point M passé en paramètre appartient à la surface (S). La fonction renvoyant un booléen pourra avoir pour en-tête `def appartient(M)` où M peut-être vu comme une liste, un triplet, ou sous la forme de son choix, le choix est laissé au candidat.
2. Le point de coordonnées $(0, 0, 0)$ appartient-il à (S) ?
3. On pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 1$ avec x, y et z des réels.
4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, puis calculer le gradient de f au point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.
5. Déterminer l'ensemble des points non-réguliers de (S).
6. Donner l'équation cartésienne du plan tangent à un point régulier de (S) dont les coordonnées seront notées (x_0, y_0, z_0).
7. Déterminer l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = a$ dans les cas $a = 1$ et $a = -1$.
8. Déduire à l'aide de la question précédente que (S) contient au moins six droites. On peut montrer que (S) contient *exactement* six droites.

$\diamondsuit$

Exemple G2 :
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t-1}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t^2+3}{t-1} \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

1. Donner les ensembles de définition des fonctions x et y.
2. Étudier la courbe paramétrée Γ.
3. Justifier l'existence d'asymptotes verticales et horizontales, et préciser leur équation respective.
4. (a) Définir, en Python, les fonctions `abscisse(t)` et `ordonnee(t)`, où t est un paramètre réel, et renvoyant respectivement la valeur de $x(t)$ et $y(t)$.
   (b) Tracer la courbe $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$ sur l'intervalle $I_1 = \left[\dfrac{2}{3}, 1\right[$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
   (c) Tracer la courbe $t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}$ sur l'intervalle $I_2 = \left]1, \dfrac{4}{3}\right]$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
   (d) Que constate-t-on ? Justifier votre réponse par le calcul.
   (e) Tracer la courbe $t \mapsto y(t) - 8x(t)$ sur les intervalles I_1 et I_2.

(f) Que constate-t-on ? En déduire l'équation d'une droite asymptote à la courbe. Vous démontrerez votre conjecture.

$\diamondsuit$

H Probabilités discrètes

• Modélisation et compréhension de l'expérience • Union, intersection, indépendance d'évènements • Loi d'une variable aléatoire, loi géométrique, loi de Poisson • Formule des probabilités totales	• Simuler une expérience • Simuler une loi de référence • Simuler plusieurs fois la même expérience, représenter et interpréter les résultats • Calculer une espérance par valeur moyenne

Exemple H1 :
Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos, dont un seul fonctionne.

1. Vous essayez les stylos l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien devrez-vous effectuer d'essais en moyenne ?
2. Même question si on suppose que vous remettez (à tort) le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard à nouveau.
3. Vous en essayez un (au hasard) puis, s'il y a échec, un deuxième puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez (au hasard) le troisième, puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez (au hasard) le quatrième, et ainsi de suite. Combien devrez-vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?
4. (a) Proposer dans chacun des trois situations des fonctions Python d'en-têtes respectives `simul1(s)`, `simul2(s)` et `simul3(s)` renvoyant le nombre d'essais nécessaires à la découverte du bon stylo, où s est le nombre de stylos (ici $s = 10$).
   (b) À l'aide des fonctions précédentes, écrire des fonctions `esp1(N,s)`, `esp2(N,s)` et `esp3(N,s)` qui fournissant la moyenne du nombre d'essais nécessaires au cours de N réalisations de la même expérience, où s correspond toujours au nombre de stylos. Confronter les résultats expérimentaux aux valeurs trouvées dans les questions précédentes.

$\diamondsuit$

Exemple H2 :
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On note également A_n l'évènement "S_n est paire" et $p_n = P(A_n)$.

1. Donner la loi de S_n, son espérance et sa variance.
2. Calculer p_1, p_2 et p_3.
3. Écrire une fonction Python `proba(p,n)` prenant en entrée un réel $p \in \,]0,1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et retournant une approximation empirique de p_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$P(A_{n+1}|A_n) = 1 - p \quad \text{et} \quad p_{n+1} = (1-2p)\,p_n + p.$$
5. Déterminer une relation de récurrence pour la suite (u_n) définie par $u_n = p_n - \dfrac{1}{2}$, puis en déduire l'expression et la limite de la suite (p_n).

$\diamondsuit$

I Continuité, dérivabilité, équations différentielles

🎓	➤
• Prolongement par continuité • Théorème de limite de la dérivée • Théorèmes de Rolle et des accroissements finis • Formules de Taylor • Théorèmes de structure des solutions d'équations différentielles linéaires et de Cauchy-Lipschitz • Méthodes de variation de la constante et d'abaissement de l'ordre	• Calculer une fonction et tracer son graphe • Interpréter graphiquement une limite, la continuité • Représenter plusieurs solutions d'une même équation différentielle

Exemple I1 :
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera $\widetilde{f}$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction $\widetilde{f}$.
3. Tracer sans justification l'allure de $\widetilde{f}$.
4. Écrire une fonction Python `fonctionF(x)` prenant en entrée un réel x et retournant la valeur de $\widetilde{f}(x)$. Tracer son graphe sur $[-4, 10]$.

$\diamondsuit$

Exemple I2 :
Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}.$$

On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \pi$.
2. Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto f(x) - x$. Justifier que g est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier que $0 < \ell < \pi$.
4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{3}{4}||u_n - \ell|.$$

   On pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f.
5. Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \pi\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

   et en déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. (a) Écrire une fonction Python `fonction(x)` prenant en entrée un paramètre réel x et retournant $f(x)$.
   (b) Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en entrée un paramètre entier n et retournant u_n.

(c) Donner une valeur approchée de ℓ à l'aide de Python.

$\diamondsuit$

Exemple I3 :
On considère l'équation différentielle

$$x^2y' + y = 1. \tag{E}$$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}_+^*$ et dans $\mathbb{R}_-^*$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer une expression de la solution $y_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de (E) vérifiant $y_a(1) = a$.
3. Écrire en langage Python une fonction `sol(a)` prenant en entrée un réel a et retournant le tracé de la fonction y_a sur $]0, 2[$.
4. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la limite de f en 0^+.
5. Déduire des questions précédentes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

$\diamondsuit$

J Géométrie, espaces vectoriels

• Applications linéaires, sous-espaces vectoriels • Familles libres, génératrices, bases • Plans, droites, équation cartésienne • Projecteurs, symétries	• Tracer des courbes dans le plan • Tracer des surfaces dans l'espace • Manipuler des vecteurs, des matrices, des polynômes

Exemple J1 :
Soit E un espace vectoriel et f, g des endomorphismes de E. Montrer que

$$f(\ker(g \circ f)) = (\ker g) \cap (\operatorname{Im} f).$$

$\diamondsuit$

Exemple J2 :
On se place dans l'espace euclidien, muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases}$ et le plan $\mathscr{P}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = -t - s \\ y = t - 1 \\ z = s + 1 \end{cases}$.

1. (a) Déterminer un système d'équations paramétriques de $\mathscr{D}$, puis en donner un point et un vecteur directeur.
   (b) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H_1 du point M_1 de coordonnées $(9, 3, 5)$ sur $\mathscr{D}$.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, puis en donner un point et un vecteur normal.
   (b) Déterminer la distance du point M_2 de coordonnées $(1, 2, 3)$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
4. À l'aide de Python, tracer la droite $\mathscr{D}$ et le plan $\mathscr{P}$, et vérifier le résultat de la question précédente.

$\diamondsuit$

Exemple J3 :
Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et f et g les applications définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad f(P) = P', \quad g(P) = XP.$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que f est surjective, et non-injective.
3. Montrer que g est injective, et non-surjective.

$\diamondsuit$

Exemple J4 :
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto \cos(nx)$. Montrer que la famille $F = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. $\diamondsuit$

K Séries entières

• Rayon de convergence • Dérivation, primitivation et intégration terme à terme • Lien avec les équations différentielles	• Calcul de somme partielle • Tracé de fonction somme

Exemple K1 :
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Tracer avec Python la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $]-1,1[$. On pourra utiliser la commande `linspace`.
3. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in D_f, \quad \frac{1}{-x^2+x+2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{2-x}.$$

4. Donner le développement en série entière et le rayon de convergence des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2-x}$.
5. Montrer que f est développable en série entière. Déterminer ce développement et son rayon de convergence.

$\diamondsuit$

Exemple K2 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (-1)^n.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (a) Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant en entrée un entier naturel n et retournant la valeur de u_n.
   (b) En utilisant la fonction `suite(n)`, conjecture la convergence ou la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 2$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n u_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
4. Soit $x \in]-1,1[$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Calculer et simplifier $f(x) - \dfrac{x}{2} f(x)$. En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{2x}{(1+x)(2-x)}.$$

5. Déduire de la question précédente une expression de u_n en fonction de n, puis vérifier l'hypothèse émise à la question 2b.

$\diamondsuit$

Exemple K3 :
On note (E) l'équation différentielle

$$xy'' - (x+1)\,y' + y = 0.$$

1. Soit f une solution de (E) développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$. On note, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$.
   (b) En déduire que, $r = +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2a_2 e^x + (a_0 - 2a_2)(1+x).$$

2. Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

$\diamondsuit$

L Polynômes

• Degré • Division euclidienne • Racines, multiplicité, lien avec les dérivées • Lien avec les matrices et les endomorphismes	• Manipuler des polynômes (degré, racines...) • Tracer des courbes représentatives

Exemple L1 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Δ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Exprimer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
3. Montrer que $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par Δ, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
4. Soit $P \in \ker \Delta$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.
   (b) En déduire que P est constant.
   (c) Déterminer $\ker \Delta$

$\diamondsuit$

Exemple L2 :
Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$. $\diamondsuit$

Exemple L3 :
On note $P = X^3 + X^2 - X - 1$, et on considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Factoriser le polynôme P.
2. Montrer que $P(A) = 0$, où on note $P(A) = A^3 + A^2 - A - 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note R le reste de la division euclidienne de X^n par P. Déterminer R. On pourra évaluer R en plusieurs valeurs bien choisies.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\diamondsuit$

ANNEXE

A Extraits de rapports de jury

1 Écrit

1. Commentaires généraux :
   - Malgré les efforts de présentation de la plupart des copies, certaines se rapprochent encore trop d'un brouillon. On attend aussi que les résultats soient encadrés et les arguments clés mise en évidence. Il est fondamental de faire apparaitre au correcteur de manière lisible, claire et concise les étapes qui mènent au résultat. Les réponses doivent être justifiées. En particulier lorsque le résultat est donné dans l'énoncé, le correcteur attend qu'on explique comment y parvenir.
   - Dans l'ensemble, les candidats (disons, au dessus de la médiane) ne manquent pas de compétences mathématiques pour répondre aux questions posées. En revanche, la maîtrise du français s'est avérée très problématique. Cela semble être la cause profonde du manque, assez général, d'explications et de justifications. Outre les qualités attendues dans la rédaction qui sont absentes chez de nombreux candidats,on peut signaler des soucis majeurs de lecture d'énoncé. On ne pourra donc jamais trop conseiller, d'une part, de lire très attentivement les questions posées (car la compréhension claire du problème fait partie intégrante de sa résolution), d'autre part de prendre conscience qu'on écrit avant tout pour être lu et compris !
   - Relire ses phrases pour vérifier la justesse (ou du moins l'aspect compréhensible de sa réponse par un tiers) est un atout important.
   - Le candidat doit apprendre à gérer son temps de façon efficace, en s'accordant 10 minutes en début d'épreuve pour lire l'enchaînement des questions, et en gardant dix minutes à la fin pour se relire et mettre en forme sa copie (encadrer, souligner...).
   - L'utilisation d'abréviations dans les copies est à proscrire : cette familiarité voire désinvolture vis-à-vis du correcteur sera-t-elle encore de mise lors des épreuves orales ?
   - Le jury rencontre trop souvent des copies incompréhensibles, peu soignées ou voulant faire illusion. Il est vivement déconseillé d'utiliser les locutions "évident", "trivial", "il est clair que". Si un résultat est évident, il suffit de donner les arguments qui le montrent, sans commentaire.
   - Un grand nombre de candidats ont survolé beaucoup de questions, sans consacrer le temps nécessaire pour les traiter correctement. Ils devraient se concentrer sur les questions les plus faciles ou les plus classiques en les traitant rigoureusement pour parvenir au résultat attendu.
   - Beaucoup de copies faibles font l'impasse sur la plus grande partie du sujet avant de tenter les dernières questions. Celles-ci plus techniques ne sont véritablement abordables qu'à condition d'avoir un minimum compris ce qui précède. Il est inutile de tenter de faire illusion sur des questions plus difficiles quand celles plus faciles ont posé problème.
   - La différence avec les meilleurs candidats se fait sur les questions, même basiques, qui demandent des capacités d'abstraction, notamment montrer qu'un ensemble de fonctions est un espace vectoriel.
   - Peu de candidats lisent en entier l'expression "nécessaire et suffisante".

- Lorsque le sujet donne une formule à démontrer, le candidat doit chercher à la prouver de façon rigoureuse, et non pas à tordre ses propres calculs faux afin qu'ils cadrent, ni à tenter de justifier la formule à l'aide d'explications obscures. L'honnêteté intellectuelle fait partie des qualités nécessaires à tout ingénieur.

2. Algèbre et géométrie :
   - Les réponses à des questions géométriques devraient davantage être accompagnées d'un dessin, même lorsque celui-ci n'est pas explicitement demandé.
   - Rappelons que le carré f^2 de l'endomorphisme f est le composé $f \circ f$ et n'a donc aucun lien avec une éventuelle multiplication.
   - Beaucoup de "une somme de matrices inversibles est inversible". Pour affirmer sans sourciller une chose pareille, il faut déjà croire qu'elle est valable sur les nombres réels ; il y a là des lacunes qui remontent au lycée, voire au collège.
3. Analyse et probabilités :
   - Les graphiques sont bâclés et souvent illisibles, c'est dommage. Quasiment aucun candidat ne s'est donné la peine de choisir une échelle permettant d'y voir quelque chose. Les graphiques sont tracés sans la donnée de valeurs images.
   - Les développements limités sont faits de manière peu rigoureuse en particulier sur les petits o.
   - Plusieurs candidats confondent le théorème des valeurs intermédiaires avec le théorème de la bijection. Une fonction polynomiale de degré 3 n'est pas monotone en général.
   - Les demandes de justification avant calculs, par exemple "montrer qu'une fonction est dérivable" ou "montrer qu'une série converge", sont peu ou mal traitées, le candidat estimant à tort que calculer (une dérivée ou une somme) suffit à justifier l'existence.
   - Rappelons que si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0. Trop de candidats ont invoqué la réciproque qui est grossièrement fausse. Enfin, calculer des sommes sans bornes de sommation n'est pas correct.
   - Malgré l'utilisation de la calculatrice, on rencontre des erreurs de calculs ou, plus souvent, des incompréhensions sur la signification des calculs (par exemple $u_n \to 1$ qui se transforme en $u_n = 1$ ou l'oubli des termes en petit o lors des développements limités
   - Le premier problème a séparé les candidats de manière assez tranchée entre ceux connaissant une loi de Bernoulli et sachant manier le vocabulaire lié aux probabilités et ceux ne répondant qu'à un nombre restreint de questions.
   - L'exercice proposait également une gestion de sommes infinies. Aborder une somme infinie pose la question de la convergence, et peu de candidats ont fait cas de la légalité de leur démarche.
   - Il n'est pas inutile de rappeler que la continuité n'implique pas la dérivabilité, et il est toujours pénible de lire "$f(x)$ est continue".

2 Oral

1. Commentaires généraux :
   - Outre les qualités mathématiques, le jury est tout particulièrement attentif à l'autonomie, l'aisance orale, la vivacité et la réactivité des candidats. Il ne s'attend nullement à une réussite exhaustive et immédiate, mais à la présentation d'une réflexion organisée, où le candidat ou la candidate expose ses réflexions, ses pistes et ses idées.
   - La plupart des candidats font un réel effort de présentation, sont dynamiques et capables d'un échange fructueux avec l'examinateur. Ceux qui confondent oral et épreuve écrite au tableau sont heureusement de moins en moins nombreux.
   - Pour leur immense majorité, la dynamique de l'oral de mathématiques est trop souvent créée par le jury qui doit, à chaque étape, encourager le candidat à poursuivre. Le jury déplore cette passivité trop répandue.
   - Il est dommage de voir qu'un candidat ne prenne pas en compte les remarques de l'examinateur.
   - La gestion du tableau fait également partie des éléments permettant à l'examinateur d'apprécier la qualité de la prestation du candidat. La présentation doit être claire, ordonnée et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Il est avisé de faire ressortir les résultats obtenus au tableau afin de faciliter leur utilisation dans la suite du problème. On rappelle aux candidats qu'ils doivent demander avant d'effacer le tableau.
   - S'il est important de connaître des méthodes et de développer des automatismes permettant de répondre aux différentes questions posées, l'oral permet de tester systématiquement si ces méthodes reposent sur une compréhension solide des concepts.

- Rappelons qu'il est fondamental de connaitre l'énoncé exact des théorèmes du cours et d'utiliser des termes appropriés. l'énoncé d'un théorème n'est pas restreint à celui de son résultat : il faut également en connaitre les hypothèses précises.
- Chaque exercice proposé forme un tout. La capacité de prendre en compte les résultats des questions précédentes ou des données intermédiaires est partie intégrante de l'évaluation de la prestation du candidat. Un futur ingénieur doit être en mesure d'articuler et de synthétiser des données afin de répondre à un problème, en particulier quand chaque pas de démonstration est guidé.
- S'il est difficile pour un étudiant de finir l'intégralité d'une planche lors de la préparation, il n'en reste pas moins vrai qu'une lecture complète est nécessaire pour comprendre le problème dans sa globalité.

2. Algèbre et géométrie :
   - Les fondamentaux de première année sont souvent négligés : savoir établir qu'une famille de vecteurs est une base, que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, ce qu'est la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, etc.
   - Les candidats n'utilisent en général pas le déterminant pour établir la liberté d'une famille de vecteurs.
   - Il est (très) lassant de proposer des matrices aux candidats et, quelle que soit la question, d'entendre : "on va calculer le polynôme caractéristique", sans aucune analyse du problème.
   - En algèbre, les plans et droites illustrent simplement des notions abstraites et permettent de mettre en avant une bonne compréhension du candidat sur l'étude des isométries.
   - Les questions portant sur les complexes ont révélé un certain nombre de faiblesses sur cette partie du programme et ont été clivantes en termes d'appréciation des prestations. Ne pas comprendre le terme "affixe", avec parfois une confusion avec le terme abscisse, dans un énoncé ou ne connaître que l'écriture algébrique d'un nombre complexe sont des lacunes inacceptables pour un futur élève-ingénieur. De même, échouer devant un calcul de module ou d'argument laisse une mauvaise impression à l'examinateur.
3. Analyse et probabilités :
   - Certains ignorent lois usuelles et théorème de transfert et ne savent pas modéliser une expérience aléatoire simple. Il est là encore important de maitriser les notions de base et le vocabulaire afférent : indépendance,incompatibilité, etc.
   - De très nombreux problèmes concernant la manipulation et la détermination des équivalents ont été relevés.
   - Les changements de variable, les intégrations par parties, ne sont presque jamais justifiés.
   - La détermination de la tangente à une courbe paramétrée pose toujours problème.
   - Il est imprudent d'essayer de deviner un résultat plutôt que d'effectuer un raisonnement rigoureux. Mieux vaut passer une minute à poser un changement de variable avec justesse, puis revenir à une intégrale sur un segment pour faire une intégration par partie dans une intégrale généralisée, que d'obtenir en un tour de main un résultat faux.
   - Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte de probabilités présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre garde de justifier le choix de leur réponse voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.
   - Il serait souhaitable que les candidats fassent un effort de réécriture des événements (à l'aide d'intersection, d'union, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul des probabilités. La confusion entre événement et probabilité est également à déplorer.

INDEX