Ellipsoïde de John-Loewner

Florian Bouguet

Références :
- Alessandri : Thèmes de géométrie

Tout le monde s'accordera à dire que ce développement est plus que classique, car il est plutôt abordable et rentre dans beaucoup de leçons (tant d'analyse que d'algèbre). Cependant, il soulève des questions un peu fines auxquelles il est bon d'avoir réflechi auparavant.

Theorème 1 (*de* John-Loewner)

Soit K un compact d'intérieur non-vide de $\mathbb{R}^n$.
Si $0 \in \mathring{K}$,
Alors il existe un unique ellipsoïde contenant K centré en 0 de volume minimal.

Avant de prouver ce beau théorème (nous reviendrons sur ses hypothèses à la fin), énonçons un lemme bien utile :

Lemme 1

Définissons pour $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \mu(S) = \det(S)^{-1/2}$.
Alors μ est strictement convexe sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Preuve du lemme :

Toute la preuve repose sur l'inégalité suivante, valable pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in]0,1[$:

$$a^t b^{1-t} \leq ta + (1-t)b \qquad (\star)$$

Cela se démontre très rapidement grâce à la stricte concavité de $\ln$. On a d'ailleurs égalité si, et seulement si, $a = b$. Rappelons ensuite que $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, on peut donc bien parler de *fonction convexe*. Munis de cet outil qui va nous mâcher le travail, posons nos calculs. Soient $S, R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in]0,1[$. Par le théorème de pseudo-réduction simultanée, il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P^T D_S P$ et $R = P^T D_R P$ où $D_S = \text{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ et $D_R = \text{diag}(r_1, \ldots, r_n)$. Notons que les s_i et les r_i sont strictement positifs (à noter qu'on pourrait supposer $D_S = I_n$ ou, si S et R commutaient, $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: il est recommandé d'avoir les idées claires là-dessus).

$$\begin{aligned}
\mu(tS + (1-t)R) &= \det\left(P^T(tD_S + (1-t)D_R)P\right)^{-1/2} = (\det P)^{-1}\left(\det(tD_S + (1-t)D_R)\right)^{-1/2} \\
&= (\det P)^{-1}\left(\prod_{i=1}^n ts_i + (1-t)r_i\right)^{-1/2} \\
&\leq (\det P)^{-1}\left(\prod_{i=1}^n s_i^t r_i^{1-t}\right)^{-1/2} \qquad \text{en appliquant } (\star) \text{ puis l'élévation à la puissance } -1/2 \\
&\leq (\det P)^{-1}\left(\left(\prod_{i=1}^n s_i^{-1/2}\right)^t \left(\prod_{i=1}^n r_i^{-1/2}\right)^{1-t}\right) \\
&\leq (\det P)^{-1}\left(t\left(\prod_{i=1}^n s_i^{-1/2}\right) + (1-t)\left(\prod_{i=1}^n r_i^{-1/2}\right)\right) \qquad \text{en appliquant à nouveau } (\star) \\
&\leq (\det P)^{-1}\left(t(\det D_S)^{-1/2} + (1-t)(\det D_R)^{-1/2}\right) \\
&\leq t\mu(S) + (1-t)\mu(R)
\end{aligned}$$

D'autre part, les deux seules "vraies" inégalités utilisées sont dûes à $(\star)$; on a donc égalité si, et seulement si, $s_i = r_i$ pour tout i, autrement dit $S = R$. Ce qui achève la preuve du lemme

$\square$

Preuve du théorème :

Voyons maintenant en quoi le théorème s'appuie sur ce lemme. On définit un ellipsoïde comme la boule unité fermée associée à une forme quadratique définie positive (ou à sa matrice symétrique définie positive associée). Les ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ sont donc du type :

$$B_S = \{x \in \mathbb{R}^n / < Sx, x > \leq 1\}$$

Remarquons au passage que la boule unité $\bar{\mathbb{B}}$ est l'ellispoïde associé à I. En supposant connue l'existence et l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive on a

$$\begin{aligned} x \in B_S &\Leftrightarrow\ < Sx, x > \leq 1 \\ &\Leftrightarrow\ < \sqrt{S}x, \sqrt{S}x > \leq 1 \\ &\Leftrightarrow\ \|\sqrt{S}x\| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{S}x \in \bar{\mathbb{B}} \end{aligned}$$

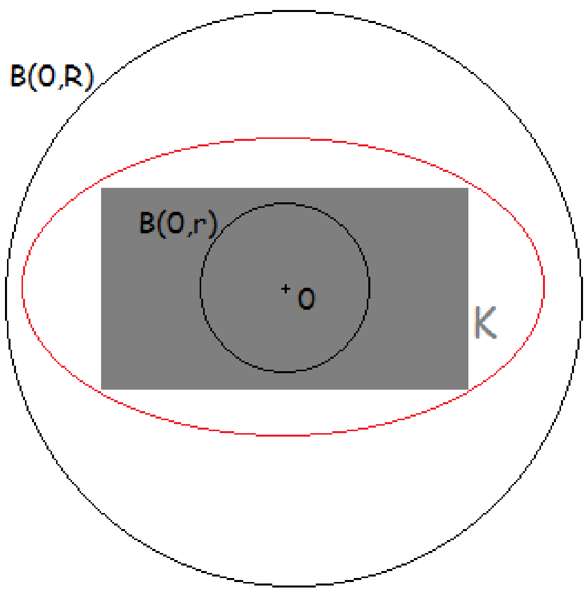
Donc $\sqrt{S}$ réalise un difféomorphisme de B_S sur $\bar{B}$. Par le théorème du changement de variable on a

$$Vol(B_S) = \int_{B_S} \mathbb{1} = \int_{\mathbb{B}} \left|\det\left(\sqrt{S}^{-1}\right)\right| \mathbb{1} = \mu(S)\mathrm{Vol}(\bar{\mathbb{B}})$$

Le déterminant se comportant bien, on a en effet $\det\left(\sqrt{S}^{-1}\right) = \det(\sqrt{S})^{-1/2} = \mu(S)$.

On voit bien que le volume de B_S est proportionnel à $\mu(S)$. On va donc chercher à minorer cette fonction pour terminer la preuve. K étant compact et d'intérieur non-vide, il existe r et R tels que

$$B_{I/r^2} = \bar{B}(0, r) \subseteq K \subseteq \bar{B}(0, R) = B_{I/R^2}$$



On va donc naturellement chercher à minimiser μ sur l'ensemble, dont on va montrer qu'il est compact convexe

$$C = \left\{ S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) / K \subseteq B_S \text{ et } \mu\left(\frac{I}{r^2}\right) \leq \mu(S) \leq \mu\left(\frac{I}{R^2}\right) \right\}$$

<u>C est borné</u>

$$\begin{aligned} \bar{B}(0,r) \subseteq B_S \quad & \Rightarrow \quad \forall x \text{ de norme } r, \|\sqrt{S}x\| \leq 1 \\ & \Rightarrow \quad \forall x \text{ de norme } r, r\left\|\sqrt{S}\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq 1 \\ & \Rightarrow \quad \|\sqrt{S}\,\| \leq r^{-1} \end{aligned}$$

<u>C est convexe</u>
Soient $S, R \in C$. Notons $M = tS + (1-t)R$. $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ par convexité de ce dernier. Par convexité de μ, $\mu(M) \leq \mu\left(I/R^2\right)$. K est alors évidemment inclus dans B_M et donc $\mu\left(I/r^2\right) \leq \mu(M)$.

<u>C est fermé</u>
C'est évident (attention, une suite de matrices symétriques définies positives ne converge pas forcément vers une matrice définie ; c'est le cas ici avec la condition sur $\mu(S)$).

μ est donc convexe sur un compact convexe, elle possède donc un unique minimum.

$\square$

REMARQUE

On pourrait se placer dans le cas d'un espace affine (de dimension finie) et supposer simplement que K est d'intérieur non-vide. Il suffirait alors de vectorialiser notre espace en un point de $\mathring{K}$ pour appliquer le théorème. Ceci dit, la prétendue unicité de l'ellipsoïde de JOHN-LOEWNER est alors sujette à caution, car elle dépend fortement de l'origine de l'espace vectorielle considéré. A méditer...