Formule sommatoire de POISSON

Florian BOUGUET

Références :
– GOURDON : Analyse
– QUEFFÉLEC, ZUILY : Analyse pour l'agrégation

On notera la transformée de FOURIER :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x} f(x)dx$$

On aurait une formule analogue avec n'importe quelle autre convention de la transformée de FOURIER, mais celle-ci est la plus élégante :

Theorème 1 (*formule sommatoire de* POISSON)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$
Si $f, f' = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *quand* $|x| \to \infty$
Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Preuve :

Introduisons, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$f_n(x) = f(x+n)$$

On va montrer que $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soit donc $A > 0$ et $x \in [-A, A]$. $f = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc il existe $M > 0$ tel que, si $|t| \geq K$, alors $|f(t)| \leq \frac{M}{t^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} |n| \geq 2A \quad &\Rightarrow \quad |n+x| \geq |n| - |x| \geq |n| - A \geq \frac{|n|}{2} \\ &\Rightarrow \quad |f(n+x)| \leq \frac{M}{(n+x)^2} \leq \frac{4M}{n^2} \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(x)|$ converge, et donc $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[-A, A]$. En particulier, $\sum_n f_n$ converge simplement vers une certaine fonction F. L'hypothèse sur f' permet de montrer, exactement de la même façon, que $\sum_n f_n'$ converge normalement sur tout compact. On en déduit que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = F(x)$$

Donc F est 1-périodique. On peut donc écrire ses coefficients de FOURIER :

$$\begin{aligned}
c_k(F) &= \int_0^1 F(x)\mathrm{e}^{-2i\pi kx}dx = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\mathrm{e}^{-2i\pi kx}dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\mathrm{e}^{-2i\pi kx}dx \qquad \text{car la série des } f_n \text{ converge uniformément sur tout compact} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi k(t-n)}dt \qquad \text{en posant } t = x+n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-2i\pi kt}dt \\
&= \hat{f}(k)
\end{aligned}$$

Le théorème de JORDAN-DIRICHLET permet de conclure : F est $\mathcal{C}^1$ donc sa série de FOURIER con verge uniformément donc simplement vers elle-même :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)\mathrm{e}^{2i\pi nx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi nx}$$

On conclura la démonstration en faisant $x = 0$ dans l'expression précédente.

$\square$