Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Florian BOUGUET

Références : [Szpirglas] Algèbre L3, p344 (*merci à Hugo M.*)
Au cours de ce développement, on montre plusieurs choses : on caractérise le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de la trace, on démontre que l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée $\bar{\mathbb{B}}$ associée à la norme subordonnée à $\|\cdot\|_2$ puis que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est en fait l'ensemble de ses points extrémaux. Il s'agit d'un développement long mais faisant appel à de nombreuses notions d'algèbre linéaire.

Les normes considérées seront la norme $\|\cdot\|_2$ pour les vecteurs et la norme $|||\cdot|||_2$ pour les matrices.

Lemme 1 (*caractérisation du dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*)

Le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est exactement

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})' = \{\varphi_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM) / A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

Preuve du lemme :

Notons $\Phi : A \mapsto \varphi_A$ définie comme au-dessus. La linéarité de la trace montre que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et donc $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R})')$. En comparant les dimensions de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de son dual,, il reste juste à montrer que Φ est injective. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_A = 0$. Si on note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors

$$\phi_A(E_{ij}) = \mathrm{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$$

J'invite mes lecteurs à faire au moins une fois le calcul pour être à l'aise là-dessus, mais il n'y a rien de difficile. On déduit donc que $A = O$, ce qui conclut la preuve du lemme.

□

Theorème 1

On a

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \bar{\mathbb{B}}$$

Preuve du théorème 1 :

Remarquons tout de suite que $\bar{\mathbb{B}}$ est convexe et que

$$\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \|\Omega\| = 1$$

On a donc $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subseteq \bar{B}$. Reste à montrer l'inclusion inverse.

Par un corollaire du théorème d'HAHN-BANACH, on a que $\mathrm{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On veut donc montrer que $\forall M \in \bar{\mathbb{B}}$ on a, $\forall \varphi$ forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) \leq \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\varphi(\Omega)\}$$

D'après le lemme, cela revient à montrer que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(AM) \leq \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\mathrm{Tr}(A\Omega)\}$$

Considérons une décomposition polaire de A (on n'a pas unicité *a priori*, si $A \notin Gl_n(\mathbb{R})$),

$$A = UR \qquad \text{avec } U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), R \in S_n^+(\mathbb{R})$$

Considérons également $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de vecteurs propres de R (rappelons que R est orthodiagonalisable car symétrique réelle). Alors

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(AU^{-1}) &= \text{Tr}(URU^{-1}) = \text{Tr}(U^{-1}UR) = \text{Tr}(R) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|
\end{aligned}$$

Soit $M \in \bar{\mathbb{B}}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(AM) &= \text{Tr}(MA) = \sum_{i=1}^{n} < MAe_i, e_i > = \sum_{i=1}^{n} < Ae_i, M^T e_i > \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|URe_i\|.\|M^T e_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\|.\|M^T\|.\|e_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|Re_i\| \qquad \text{car } \|M^T\| = \|M\| \leq 1 \text{ et } \|e_i\| = 1 \\
&\leq \text{Tr}(AU^{-1}) \leq \sup_{\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \{\text{Tr}(A\Omega)\}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme.

□

Theorème 2

On a

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \textit{Extr}(\bar{\mathbb{B}})$$

Preuve du théorème 2 :
Rappellons que, par définition,

$$M \text{ est extremal de } \bar{\mathbb{B}} \text{ si, et seulement si, } \left[\forall M_1, M_2 \in \bar{\mathbb{B}}, M = \frac{M_1 + M_2}{2} \Rightarrow M = M_1 \text{ ou } M_2\right]$$

► les points extremaux de $\bar{\mathbb{B}}$ sont de norme 1
Remarquons que

$$O = \frac{I + (-I)}{2}$$

O n'est donc pas extremal. Soit $A \in \mathbb{B}$ (c'est-à-dire $\|A\| < 1$). On a

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\|A\|} + \frac{(2\|A\| - 1)A}{\|A\|}\right)$$

Donc A n'est pas extremal.

► les éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont extremaux
Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Omega = \frac{U+V}{2}$ avec $U, V \in \bar{\mathbb{B}}$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
4\|x\|^2 &= \|2\Omega x\|^2 = \|Ux + Vx\|^2 \\
&\leq \|Ux\|^2 + \|Vx\|^2 + 2 < Ux, Vx > \leq \|x\|^2 + \|x\|^2 + 2\|Ux\|\|Vx\| \\
&\leq 4\|x\|^2
\end{aligned}$$

Les inégalités sont donc des égalités, et donc Ux et Vx sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARTZ) et $\|Ux\| = \|x\| = \|Vx\|$. Bref, $Ux = Vx$ pour tout x, donc $\Omega = U = V$. Ω est donc extremal.

► les éléments extremaux sont des isométries
Soit $A = UR$ extremal de $\bar{\mathbb{B}}$. En particulier, $\|A\| = 1$ d'après le premier ►. On va montrer que $R = I$. Il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$R = P^T DP \qquad \text{avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$\|A\| = \|R\| = \|D\|$, donc pour tout i, $\lambda_i \in [0,1]$. Supposons qu'il existe un λ_i tel que $\lambda_i < 1$ (choisissons par exemple λ_1). On peut alors écrire

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2} \qquad \text{avec } D_1 = \text{diag}(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ et } D_2 = \text{diag}(2\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Par suite

$$A = \frac{UP^T D_1 P + UP^T D_2 P}{2} \text{ : impossible car } A \text{ est extremal}$$

Donc $D = I$ donc $R = I$ donc $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

□