Convergence d'une suite de polygônes vers l'isobarycentre

Florian BOUGUET

Référence : $\emptyset$

Voici un développement à mon sens très intéressant, puisqu'il convient à la fois pour des leçons d'analyse et d'algèbres (au moins à titre d'illustration). N'étant pas référencé, il peut s'avérer délicat, mais, bien maitrisé, il est plutôt original en leçon d'agrégation. Suivant le contexte, on peut appuyer plus sur l'aspect géométrique ou plus sur l'aspect séquentiel.

Lemme 1 (*déterminant circulant*)

Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$, *et* $P_A = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$.

Alors $\det A = \prod_{k=1}^n P_A(\omega^k)$, *avec* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Preuve du lemme :

Notons $\Omega = [\omega^{(i-1)(j-1)}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{bmatrix}$.

Les ω^i étant distincts deux à deux, $\det(\Omega)$ est un déterminant de VANDERMONDE non-nul. L'idée est de calculer le déterminant de $A\Omega$. Je pense qu'il est inutile de le faire en direct (car il faut calculer les termes de la matrice $A\Omega$), mais on peut l'expliquer en calculant la première ligne ; le reste s'en déduit grâce au caractère cyclique des ω^i.

$$\det(A\Omega) = \begin{vmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & P(\omega)\omega & \cdots & P(\omega^{n-1})\omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(1) & P(\omega)\omega^{n-1} & \cdots & P(\omega^{n-1})\omega^{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

Donc

$$\det(A) = \frac{\det(A\Omega)}{\det(A)} = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$$

□

Theorème 1

Soit $x^{(0)} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. *On définit pour tout* $k \in \mathbb{N}$

$$x^{(k+1)} = \left(\frac{x_1^{(k)} + x_2^{(k)}}{2}, \ldots, \frac{x_{n-1}^{(k)} + x_n^{(k)}}{2}, \frac{x_n^{(k)} + x_1^{(k)}}{2} \right)$$

Alors $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $(g, \ldots, g) \in \mathbb{C}^d$, *où* g *est l'isobarycentre de* $x_0, \ldots, x_d$.

L'explication géométrique (qui donne son nom au développement) est très simple, en assimilant $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$. Si l'on prend un polygône (pas forcément convexe) et qu'on crée une suite de polygônes en reliant les milieux des côtés, alors la suite de polygônes "converge" vers l'isobarycentre.

Il suffit de remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x^{(k+1)} = Ax^{(k)} \qquad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 \end{bmatrix}$$

Donc la suite est définie par

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)}$$

Etudions donc la matrice A, ce qui va nous permettre d'utiliser (enfin) l'astucieux lemme énoncé plus haut. Le polynôme caractéristique de A évalué en $\lambda \in \mathbb{C}$ donne :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 & & \\ & 1/2-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2-\lambda \end{vmatrix}$$

Quoi qu'il en soit, on reconnait un déterminant circulant, et le lemme nous donne :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(\lambda - \frac{1+\omega^i}{2}\right) \qquad \text{avec } \omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Donc A est diagonalisable (car χ_A est scindé simple) : $A = PDP^{-1}$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{R})$. Donc $A^k \to A^\infty$, avec$A^\infty = PD^\infty P^{-1}$, avec $D^\infty =$diag$(1, 0, \ldots, 0)$. Donc

$$x^{(k)} \to x^\infty = A^\infty x^{(0)}$$

x^∞ est évidemment un point fixe de A, c'est-à-dire (en termes algébriques) associé à la valeur propre 1. Le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1, et le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ en fait évidemment partie. Donc

$$\exists z \in \mathbb{C} \text{ tel que } x^\infty = (z, z, \ldots, z)$$

Pour conclure, on remarquera que l'isobarycentre g de $x^{(0)}$ est aussi (par associativité) l'isobarycentre de $x^{(1)}$ et donc de $x^{(k)}$ pour tout k. En passant à la limite, g est l'isobarycentre de x^∞, donc $x^\infty = (g, g, \ldots, g)$.

□

N.B. : on peut justifier le dernier passage à la limite sur k avec la formule (qui est continue en $x^{(k)}$)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - g) = 0$$