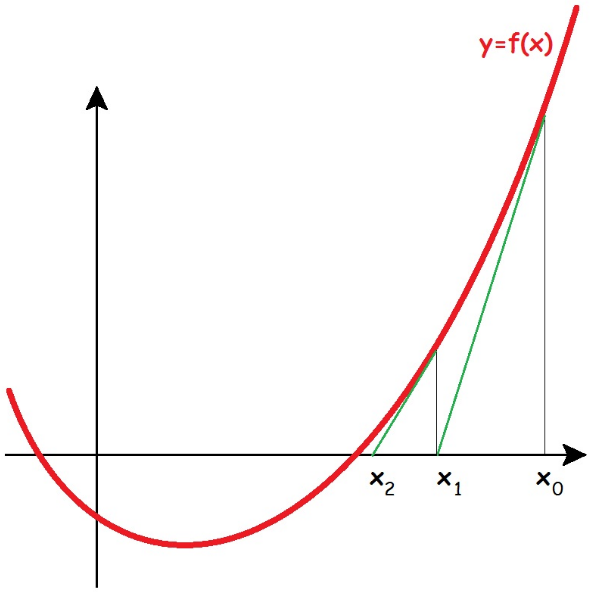
Méthode de NEWTON

Florian BOUGUET

Référence :
François ROUVIÈRE : Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.



La méthode de NEWTON est une méthode d'analyse numérique pour trouver les approximations successives des zéros d'une fonction à valeurs réelles. Ceci dit, on peut l'étendre aux fonctions à valeurs complexes, ainsi qu'aux systèmes d'équations. Même si NEWTON étudiait les polynômes à l'origine, sa méthode fonctionne bien pour des fonctions suffisamment régulières, comme les fonctions $\mathcal{C}^2$.

Theorème 1

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$, avec $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.
Si $x^* \in]a, b[$ tel que $f(x^*) = 0$ et $f'(x^*) \neq 0$.
Alors, pour x_0 assez proche de x^*, la suite définie par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge vers x^* à vitesse quadratique.

Preuve :
Remarquons d'abord que $f'(x^*) \neq 0$. Quitte à travailler avec $-f$, supposons $f'(x^*) > 0$. Donc f est localement strictement croissante sur un voisinage de x^* (car f' est continue). Donc, quitte à réduire I, on peut supposer $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' \neq 0$ sur I. $\exists \alpha > 0$ tel que $J =]x^* - \alpha, x^* + \alpha[\subseteq I$.

Posons

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

φ est bien définie pour $x \in J$. Remarquons que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x$.

Alors, $\forall x \in J$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - x^* &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - x^* = x - x^* - \frac{f(x) - f(x^*)}{f'(x)} \\
&= \frac{f(x^*) - f(x) - (x^* - x)f'(x)}{f'(x)} \\
|\varphi(x) - x^*| &\leq \frac{\sup\{|f''(x)|/x \in I\}}{|2f'(x)|}|x - x^*|^2 \qquad \text{par l'inégalité de } \textsc{Taylor-Lagrange} \\
&\leq C(x - x^*)^2 \qquad \text{avec } C = \frac{\sup\{|f''(x)|/x \in I\}}{2\inf\{|f'(x)|/x \in I\}} < \infty
\end{aligned}$$

Quitte à réduire α, on peut supposer $\alpha < \frac{1}{C}$. Alors $\varphi(x) \in J$.

On a donc montré que, pour $x_0 \in J$, on a la relation $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ et la suite (x_n) est bien définie. Il est aisé de vérifier que $C|x_n - x^*| \leq (C|x_0 - x^*|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$, d'où $\lim(x_n) = x^*$, car $C\alpha < 1$. De plus,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

La vitesse est donc quadratique.

$\square$

Proposition 1

Sous les hypothèses du théorème,
Si f est convexe sur I et $f'(x^*) > 0$
Alors (x_n) converge à vitesse quadratique vers x^* pour tout $x_0 \geq x^*$.

Preuve :
Notons désormais $J = [x^*, b]$. f est convexe sur J donc $f' > 0$ sur J. Soit $x \in J$.

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} < x$$

De plus, par l'égalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\exists c \in]x^*, x[$ tel que

$$\varphi(x) - x^* = \frac{f''(c)}{2f'(x)}(x - x^*)^2 \geq 0$$

Bref, $x^* \leq \varphi(x) < x$. Donc (x_n) est strictement décroissante, minorée par x^* qui est un point fixe de φ. Donc $\lim(x_n) = x^*$. De plus, l'inégalité

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2$$

tient toujours, la vitesse est donc encore et toujours quadratique.

$\square$

REMARQUE

- Si la méthode de Newton peut être plutôt utilisée lorsqu'on possède une première approximation grossière de x^* (qu'on cherche à affiner, la convergence quadratique étant plutôt pas dégueu), cette dernière propriété permet de trouver les racines "extrêmes" d'un polynôme (en partant suffisamment loin de celles-ci).

- Dans le cas du polynôme $X^2 - c$, il s'agit d'une méthode d'extraction de racine carrée appelée "méthode de HÉRON". Partir de $c + 1$ permet d'aboutir rapidement (et à tous les coups !) à $\sqrt{c}$.