Lemme de MORSE

Florian BOUGUET

Référence :
François ROUVIÈRE : Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.

Theorème 1 (*de* MORSE)

Soit $f \in \mathcal{C}^3(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine
Si 0 est un point critique non-dégénéré de f (i.e : $Df(0) = 0$, sign$(D^2f(0)) = (p, n-p)$)
Alors il existe un changement de variables local (i.e : $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme) $\varphi : x \mapsto u$ tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$.

Lemme 1 (*Réduction $\mathcal{C}^1$ des formes quadratiques*)

Soit $S_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible

Alors $\exists U$ voisinage de S_0 dans $S_n(\mathbb{R}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$ et $\exists \psi : U \to V \subseteq Gl_n(\mathbb{R})$ tels que $\begin{cases} \psi \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme} \\ \psi(S_0) = I_n \\ \forall S \in U, S = \psi(S)^T S_O \psi(S) \end{cases}$

Preuve du lemme :
Notons $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = M^T S_0 M$. φ est polynômiale en les coefficients de M, donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors

$$D\varphi(I).M = M^T S_0 + S_0 M$$

Il s'en suit que Ker$(D\varphi(I)) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / S_0 M \in A_n(\mathbb{R})\}$.
Si on note $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / S_0 M \in S_n(\mathbb{R})\}$, F est évidemment un supplémentaire de Ker$(D\varphi(I))$.
Notons donc $\tilde{\varphi} = \varphi_{|F}$. Puisque $I \in F$, on a $D\tilde{\varphi}(I) = (D\varphi(I))_{|F}$.
Mais maintenant, Ker$(D\tilde{\varphi}(I)) = \{0\}$. De plus, $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$,

$$D\tilde{\varphi}(I)\left(\frac{1}{2}S_0^{-1}S\right) = S$$

$D\tilde{\varphi}(I)$ est donc injective et surjective, donc bijective. Le théorème d'inversion locale s'applique, et $\tilde{\varphi}$ réalise donc un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur U, définis dans l'énoncé du lemme. A noter que l'on peut supposer $V \in Gl_n(\mathbb{R})$, ce dernier étant ouvert. Pour conclure, il suffit de poser $\psi = \tilde{\varphi}^{-1}$. □

Preuve du théorème :
Au boulot ! La formule de TAYLOR avec reste intégral nous donne, pour tout $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= Df(0)x + x^T \left(\int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt \right) x \\ &= x^T Q(x) x \qquad \text{où l'on a noté } Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt \end{aligned}$$

f étant $\mathcal{C}^3$ sur U, Q est $\mathcal{C}^1$ sur U.
De plus,

$$Q(0) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(0) dt = \frac{1}{2} D^2 f(0)$$

Donc $Q(0)$ est non-dégénérée : le lemme s'applique. Donc, pour x au voisinage de 0,

$$Q(x) = (\psi(Q(x)))^T Q(0) (\psi(Q(x))) = M(x)^T Q(0) M(x)$$

$M(x)$ est inversible et $\mathcal{C}^1$ en x. Enfin, $\text{sign}(Q(0)) = (p, n-p)$ donc $\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ tel que

$$Q(0) = P^T J P \qquad \text{où } J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Notons alors $u = \varphi(x) = PM(x)x$. On a bien $f(x) - f(0) = u^T J u = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$ sur un voisinage de 0. Il reste à vérifier que $D\varphi(0)$ est inversible. Or, on a $D\varphi(x) = PM(x) + PDM(x)x$. Donc $D\varphi(0) = PM(0) \in Gl_n(\mathbb{R})$.

Le théorème d'inversion locale permet de conclure. $\square$